정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출 문제집

대수 하



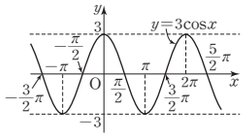
내신에 날개를 달아 주는 100발100중!

Ⅱ 삼각함수

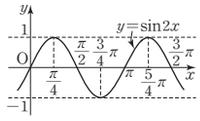
2 삼각함수의 그래프

교과서 예제 p.7

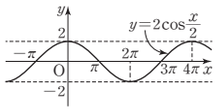
01 (1) 치역: $\{y \mid -3 \le y \le 3\}$
주기: 2π
함수의 그래프:



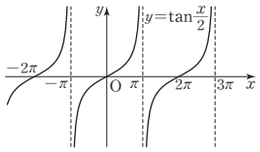
(2) 치역: $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
주기: π
함수의 그래프:



(3) 치역: $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$
주기: 4π
함수의 그래프:



(4) 치역: 실수 전체의 집합
주기: 2π
함수의 그래프:



02 (1) 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 주기: π, 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: $-\frac{1}{4}$

(3) 주기: 2π, 최댓값: 4, 최솟값: -2

(4) 주기: 2, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.

03 (1) 주기: π, 최댓값: 2, 최솟값: 0

(2) 주기: 2π, 최댓값: 1, 최솟값: 0

(3) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 최댓값: 없다., 최솟값: 0

04 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (6) $\sqrt{3}$

05 (1) 0.2250 (2) -0.2419 (3) -0.2679

06 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

07 (1) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

(3) $0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

기출 Best | 1회 p.8~11

01 ①	02 ④	03 ①	04 ③	05 ③	06 ③
07 ③	08 ⑤	09 ②	10 ④	11 ④	12 ③
13 ④	14 ⑤	15 ①	16 ②	17 ⑤	18 ④
19 ⑤	20 ④	21 ③			

기출 Best | 2회 p.12~15

01 ④	02 ⑤	03 ⑤	04 ⑤	05 ④	06 ③
07 ⑤	08 ④	09 ③	10 ①	11 ④	12 ③
13 ⑤	14 ③	15 ③	16 ④	17 ⑤	18 ⑤
19 ④	20 ③	21 ③			

변형유형 집중공략 p.16~17

1-1 1	1-2 7	2-1 ③	2-2 ③

서술형 What & How p.18~21

1 8	2 10	3 8	4 5
5 24	6 9	7 12	8 4

실전 문제 | 1회 p.22~25

01 ④	02 ⑤	03 ②	04 ③	05 ③	06 ③
07 ④	08 ③	09 ④	10 ⑤	11 ⑤	12 ①
13 ③	14 ②, ⑤	15 ③	16 ④	17 ①	18 ⑤
19 ③	20 ③	21 3	22 12		

실전 문제 | 2회 p.26~29

01 ④	02 ②	03 ①	04 ④	05 ②	06 ③
07 ③	08 ③	09 ②	10 ②	11 ②	12 ③
13 ⑤	14 ①	15 ④	16 ④	17 ④	18 ③
19 ③	20 8	21 9			

수능형 기출문제 & 변형문제 p.30~34

1 ④	2 ④	3 ③	4 ④	5 ①
6 ①	7 ②	8 ④	9 ①	10 ③

3 사인법칙과 코사인법칙

교과서 예제 p.37

01 (1) $R=\sqrt{3}$, $b=3$ (2) $R=3\sqrt{3}$, $a=3\sqrt{6}$
(3) $R=1$, $A=30^\circ$ (4) $R=1$, $B=15^\circ$

02 2 : 4 : 3

03 $C=90^\circ$인 직각삼각형

04 (1) $2\sqrt{7}$ (2) 1 (3) 60° (4) 45°

05 (1) 12 (2) 3

06 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (3) $12\sqrt{5}$ (4) $\frac{21\sqrt{5}}{10}$

07 (1) 3 (2) $28\sqrt{3}$

08 $40\sqrt{2}$

기출 Best | 1회 p.38~40

01 ④ 02 ② 03 ② 04 ② 05 ⑤ 06 ①
07 ③ 08 ① 09 ② 10 ① 11 ⑤ 12 ③
13 ④ 14 ④ 15 ② 16 ④

기출 Best | 2회 p.41~43

01 ④ 02 ② 03 ⑤ 04 ② 05 ③ 06 ①
07 ④ 08 ③ 09 ④ 10 ③ 11 ⑤ 12 ①
13 ⑤ 14 ① 15 ② 16 ③

변형유형 집중공략 p.44~45

1-1 ③ 1-2 ② 2-1 ④ 2-2 ②

서술형 What & How p.46~47

1 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (3) $\sqrt{5}$ 2 19 3 20 4 4

실전 문제 | 1회 p.48~51

01 ② 02 ⑤ 03 ② 04 ④ 05 ② 06 ①
07 ③ 08 ③ 09 ④ 10 ② 11 ④ 12 ④
13 ① 14 ② 15 ① 16 ① 17 ⑤ 18 ②
19 3 20 16

실전 문제 | 2회 p.52~55

01 ③ 02 ② 03 ② 04 ③ 05 ④ 06 ①
07 ① 08 ⑤ 09 ② 10 ④ 11 ⑤ 12 ③
13 ⑤ 14 ④ 15 ④ 16 ⑤ 17 ② 18 ④
19 22 20 3

수능형 기출문제 & 변형문제 p.56~58

1 ① 2 ② 3 ② 4 ③ 5 ⑤ 6 ③

III 수열

1 등차수열과 등비수열

교과서 예제 p.61

01 (1) 1, 4, 7, 10, 13, 16 (2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$
(3) 1, −1, 1, −1, 1, −1
02 (1) $a_n=2n$ (2) $a_n=10^n-1$ (3) $a_n=n(n+2)$
03 (1) $a_n=3n+4$ (2) $a_n=-4n+14$
04 $a=2$, $b=14$
05 (1) 240 (2) 490
06 (1) 765 (2) −110
07 $a_n=8n-3$
08 (1) 18, −54 (2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{27}$
09 (1) $a_n=3^n$ (2) $a_n=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
10 −15, 15
11 $\frac{127}{32}$
12 (1) $\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ (2) $4(2^n-1)$
13 (1) $a_1=1$, $a_n=4\times5^{n-1}$ $(n\geq2)$ (2) $a_n=2\times3^n$

기출 Best | 1회 p.62~66

01 ② 02 ① 03 ③ 04 ③ 05 ⑤ 06 ③
07 ④ 08 ① 09 ② 10 ② 11 ① 12 ③
13 ② 14 ① 15 ③ 16 ④ 17 ③ 18 ②
19 ③ 20 ⑤ 21 ⑤ 22 ④ 23 ① 24 ⑤
25 ②

기출 Best | 2회 p.67~71

01 ③ 02 ① 03 ④ 04 ③ 05 ① 06 ④
07 ② 08 ④ 09 ④ 10 ② 11 ③ 12 ⑤
13 ② 14 ⑤ 15 ③ 16 ③ 17 ③ 18 ①
19 ③ 20 ⑤ 21 ⑤ 22 ④ 23 ⑤ 24 ③
25 ①

변형유형 집중공략 p.72~73

1-1 −261 1-2 370 2-1 ④ 2-2 ⑤

서술형 What & How p.74~77

1 20 2 2 3 286 4 -175
5 318 6 113 7 6 8 20

실전 문제 | 1회 p.78~82

01 ② 02 ④ 03 ① 04 ⑤ 05 ① 06 ③
07 ① 08 ③ 09 ③ 10 ① 11 ② 12 ②
13 ③ 14 ③ 15 ① 16 ③ 17 ② 18 ⑤
19 ② 20 ④ 21 ① 22 ④ 23 -4 24 -512

실전 문제 | 2회 p.83~87

01 ② 02 ③ 03 ③ 04 ⑤ 05 ② 06 ①
07 ② 08 ② 09 ① 10 ③ 11 ③ 12 ⑤
13 ④ 14 ④ 15 ③ 16 ④ 17 ④ 18 ③
19 ① 20 ① 21 ③ 22 ⑤ 23 9 24 88

수능형 기출문제 & 변형문제 p.88~92

1 ③ 2 ⑤ 3 ① 4 ④ 5 9
6 512 7 30 8 24 9 ⑤ 10 ②

2 수열의 합

교과서 예제 p.95

01 (1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$ (3) $\sum_{k=1}^{10}(3k+1)$ (4) $\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}$

02 (1) $1+4+7+10+13$ (2) $3+3+3+3+3$
(3) $2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+(n+1)(n+2)$
(4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$

03 (1) 1 (2) 3

04 59

05 (1) 220 (2) 220 (3) 80

06 (1) 384 (2) 276

07 (1) $\frac{n}{3n+9}$ (2) $\frac{n}{2n+2}$ (3) $\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$

08 (1) $\frac{72}{55}$ (2) 8

기출 Best | 1회 p.96~98

01 ⑤ 02 ③ 03 ③ 04 ③ 05 ① 06 ③
07 ③ 08 ② 09 ① 10 ① 11 ④ 12 ②
13 ② 14 ① 15 ② 16 ②

기출 Best | 2회 p.99~101

01 ③ 02 ② 03 ③ 04 ② 05 ④ 06 ④
07 ③ 08 ④ 09 ④ 10 ② 11 ③ 12 ②
13 ② 14 ③ 15 ② 16 ④

변형유형 집중공략 p.102~103

1-1 40 1-2 ① 2-1 240 2-2 ③

서술형 What & How p.104~105

1 14 2 28 3 420 4 240

실전 문제 | 1회 p.106~109

01 ① 02 ③ 03 ② 04 ① 05 ④ 06 ①
07 ⑤ 08 ⑤ 09 ② 10 ④ 11 ① 12 ④
13 ④ 14 ⑤ 15 ① 16 ⑤ 17 ② 18 83
19 999

실전 문제 | 2회 p.110~113

01 ⑤ 02 ② 03 ④ 04 ② 05 ② 06 ③
07 ③ 08 ② 09 ④ 10 ① 11 ③ 12 ②
13 ① 14 ① 15 ③ 16 ③ 17 ① 18 1620
19 48

수능형 기출문제 & 변형문제 p.114~118

1 96 2 12 3 ① 4 ④ 5 ②
6 ④ 7 ③ 8 ⑤ 9 ③ 10 ①

3 수학적 귀납법

교과서 예제 p.121

01 (1) 42 (2) 5 (3) 5 (4) -4
02 0, n
03 (1) $a_n=-3n+8$ (2) $a_n=4n-5$ (3) $a_n=2^{n-2}$ (4) $a_n=3^{n-1}$
04 (1) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
05 (가) k^2+2k+1 (나) $k+1$

기출 Best | 1회 p.122~124

01 ④	02 ④	03 ②	04 ②	05 ③	06 ③
07 ③	08 ④	09 ⑤	10 ②	11 ④	12 ④
13 ⑤					

기출 Best | 2회 p.125~127

01 ①	02 ②	03 ③	04 ⑤	05 ⑤	06 ⑤
07 ②	08 ②	09 ④	10 ②	11 ④	12 ④
13 ③					

변형유형 집중공략 p.128~129

1-1 81 1-2 50 2-1 ① 2-2 20

서술형 What & How p.130~131

1 12 2 125 3 33 4 970

실전 문제 | 1회 p.132~135

01 ②	02 ④	03 ①	04 ④	05 ②	06 ⑤
07 ⑤	08 ②	09 ⑤	10 ④	11 ①	12 ③
13 ②	14 ⑤	15 ②	16 ③	17 -80	18 3

실전 문제 | 2회 p.136~139

01 ④	02 ③	03 ①	04 ④	05 ④	06 ②
07 ①	08 ①	09 ③	10 ④	11 ②	12 ⑤
13 ③	14 ①	15 ④	16 ①	17 183	18 450

수능형 기출문제 & 변형문제 p.140~142

1 7 2 ⑤ 3 ⑤ 4 6 5 ① 6 ②

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 | 1회 p.144~147

01 ⑤	02 ⑤	03 ②	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ④	09 ①	10 ②
11 ④	12 ②	13 ①	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 5	18 1022	19 9	20 75

실전 모의고사 | 2회 p.148~151

01 ④	02 ①	03 ①	04 ④	05 ①
06 ④	07 ③	08 ②	09 ①	10 ②
11 ②	12 ①	13 ④	14 ③	15 ①
16 ④	17 12	18 4	19 9	20 158

실전 모의고사 | 3회 p.152~155

01 ①	02 ③	03 ③	04 ①	05 ④
06 ③	07 ⑤	08 ①	09 ③	10 ①
11 ③	12 ⑤	13 ④	14 ④	15 ⑤
16 ⑤	17 24	18 15	19 15	20 18

실전 모의고사 | 4회 p.156~159

01 ④	02 ③	03 ③	04 ③	05 ④
06 ④	07 ③	08 ①	09 ③	10 ②
11 ②	12 ③	13 ①	14 ③	15 ④
16 ③	17 5	18 8	19 57	20 24

실전 모의고사 | 5회 p.160~163

01 ④	02 ⑤	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ②	07 ②	08 ⑤	09 ②	10 ③
11 ③	12 ④	13 ①	14 ①	15 ③
16 ③	17 8	18 171	19 19	20 23

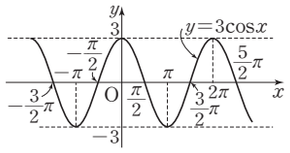
Ⅱ 삼각함수

2 삼각함수의 그래프

교과서 예제 p.7

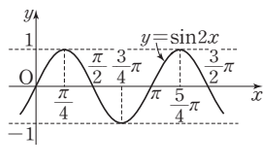
01 (1) 치역: $\{y|-3\le y\le 3\}$, 주기: 2π

함수의 그래프:



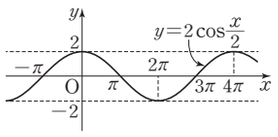
(2) 치역: $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

함수의 그래프:



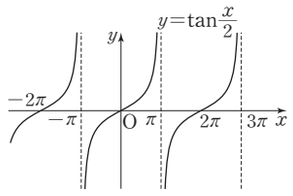
(3) 치역: $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

함수의 그래프:



(4) 치역: 실수 전체의 집합, 주기: $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

함수의 그래프:



답 (1) 치역: $\{y|-3\le y\le 3\}$, 주기: 2π, 그래프: 풀이 참조

(2) 치역: $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기: π, 그래프: 풀이 참조

(3) 치역: $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기: 4π, 그래프: 풀이 참조

(4) 치역: 실수 전체의 집합, 주기: 2π, 그래프: 풀이 참조

02 (1) 주기: $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: $-\frac{1}{4}$

(3) 주기: $\frac{2\pi}{|-1|}=2\pi$, 최댓값: $3+1=4$,

최솟값: $-3+1=-2$

(4) 주기: $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.

답 (1) 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

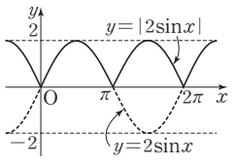
(2) 주기: π, 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: $-\frac{1}{4}$

(3) 주기: 2π, 최댓값: 4, 최솟값: -2

(4) 주기: 2, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.

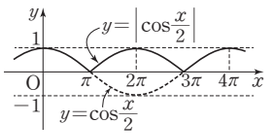
03 (1) 함수 $y=2\sin x$의 주기는 2π이고, 함수 $y=|2\sin x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=|2\sin x|$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

또 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.



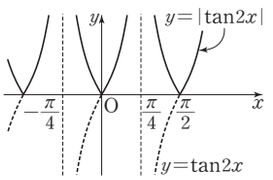
(2) 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이고, 함수 $y=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 함수 $y=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$의 주기는 $\frac{4\pi}{2}=2\pi$이다.

또 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.



(3) 함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 함수 $y=|\tan 2x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=|\tan 2x|$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

또 최댓값은 없고, 최솟값은 0이다.



답 (1) 주기: π, 최댓값: 2, 최솟값: 0

(2) 주기: 2π, 최댓값: 1, 최솟값: 0

(3) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 최댓값: 없다., 최솟값: 0

04 (1) $\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(4) $\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\tan\frac{11}{6}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(6) $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (6) $\sqrt{3}$

다른풀이 (4) $\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

05 (1) $\sin 733^\circ=\sin(360^\circ\times 2+13^\circ)=\sin 13^\circ=0.2250$

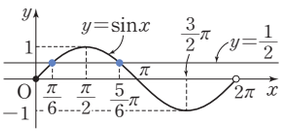
(2) $\cos 104^\circ=\cos(90^\circ+14^\circ)=-\sin 14^\circ=-0.2419$

(3) $\tan 165^\circ=\tan(180^\circ-15^\circ)=-\tan 15^\circ=-0.2679$

답 (1) 0.2250 (2) -0.2419 (3) -0.2679

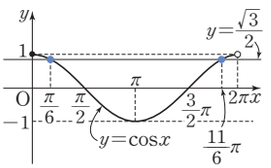
06 (1) 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$



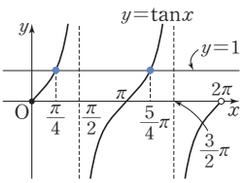
(2) 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$이므로 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$



(3) 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이므로 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

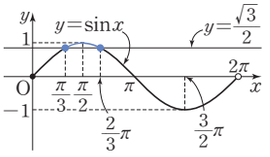


답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

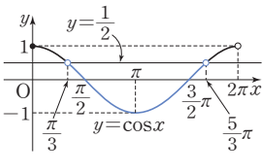
07 (1) $0\le x<2\pi$일 때 부등식 $\sin x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$



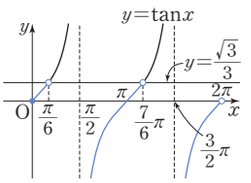
(2) $0\le x<2\pi$일 때 부등식 $\cos x<\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$



(3) $0\le x<2\pi$일 때 부등식 $\tan x<\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서

$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$



답 (1) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

(3) $0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

기출 Best | 1회

p.8~11

01 $y=3\cos(2x-4)-5=3\cos\{2(x-2)\}-5$

이므로 함수 $y=3\cos(2x-4)-5$의 그래프는 함수 $y=3\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=2$, $n=-5$이므로

$m+n=2+(-5)=-3$ 답 ①

02 ① 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

② 그래프의 점근선의 방정식은 $3x-\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서 $3x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$, 즉 $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{5}{18}\pi$ (n은 정수)이다.

③ 정의역은 $\left\{x\middle|x\ne\frac{n}{3}\pi+\frac{5}{18}\pi\text{ }(n\text{은 정수})\text{인 모든 실수}\right\}$이다.

④ $x=\frac{\pi}{9}$일 때, $y=-2\tan 0+4=4$이므로 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{9},\ 4\right)$를 지난다.

⑤ $y=-2\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+4=-2\tan\left\{3\left(x-\frac{\pi}{9}\right)\right\}+4$의 그래프는 함수 $y=-2\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{9}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

03 최댓값은 $\left|-\frac{4}{3}\right|-1=\frac{1}{3}$ $\therefore M=\frac{1}{3}$

최솟값은 $-\left|-\frac{4}{3}\right|-1=-\frac{7}{3}$ $\therefore m=-\frac{7}{3}$

주기는 $\frac{2\pi}{\left|-\frac{\pi}{2}\right|}=4$ $\therefore p=4$

$\therefore M+m+p=\frac{1}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)+4=2$ 답 ①

04 $a>0$이므로 조건 (나)에서

$a+d=8,\ -a+d=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=3$

조건 (다)에서 함수 $f(x)$의 주기가 4이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4 \quad \therefore b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)=5\cos\left(\frac{\pi}{2}x+c\right)+3$

조건 (가)에서 $f(1)=5\cos\left(\frac{\pi}{2}+c\right)+3=\frac{1}{2}$이므로

$5\cos\left(\frac{\pi}{2}+c\right)=-\frac{5}{2}$

$-\sin c=-\frac{1}{2}$, 즉 $\sin c=\frac{1}{2}$

이때 $0<c<\frac{\pi}{2}$이므로 $c=\frac{\pi}{6}$

$\therefore ad-\frac{b}{c}=5\times3-\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}}=12$ 답 ③

05 그래프에서 함수 $y=a\cos(bx+c)$의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이므로

$|a|=2 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

주기가 $\frac{5}{12}\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2}{3}\pi,\ |b|=3 \quad \therefore b=3\ (\because b>0)$

함수 $y=2\cos(3x+c)$의 그래프가 점 $\left(-\frac{\pi}{12},\ 2\right)$를 지나므로

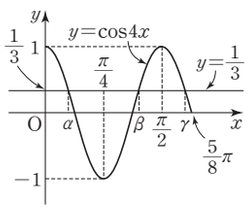
$2=2\cos\left(-\frac{\pi}{4}+c\right),\ \cos\left(c-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$0\le c<\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le c-\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$이므로

$c-\frac{\pi}{4}=0 \quad \therefore c=\frac{\pi}{4}$

$\therefore abc=2\times3\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$ 답 ③

06 함수 $y=\cos4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 점 $\left(\alpha,\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\beta,\ \frac{1}{3}\right)$이 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

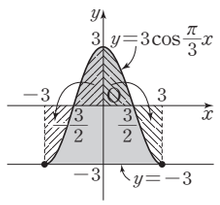
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\{4(\alpha+\beta-\gamma)\}=\cos\left\{4\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right\}$

$=\cos(2\pi-4\gamma)$

$=\cos4\gamma=\frac{1}{3}$ 답 ③

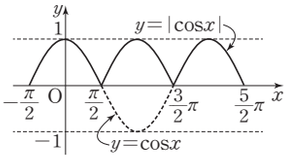
07 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 모두 같으므로 함수 $y=3\cos\frac{\pi}{3}x\ (-3\le x\le3)$의 그래프와 직선 $y=-3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 가로의 길이가 6, 세로의 길이가 3인 직사각형의 넓이와 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$6\times3=18$ 답 ③

08 함수 $y=\cos x$의 주기는 2π이고, 함수 $y=|\cos x|$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 주기는 π이다.



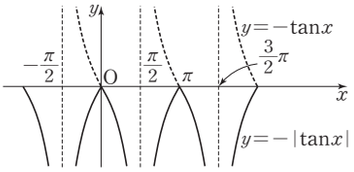
따라서 함수 $y=|\cos x|+1$의 주기도 π이다.

ㄱ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

ㄴ. 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

ㄷ. 주기는 π

ㄹ. 함수 $y=-\tan x$의 주기는 π이고, 함수 $y=-|\tan x|$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 주기는 π이다.



따라서 함수 $y=|\cos x|+1$과 주기가 같은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

09 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin(-\theta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos(\pi+\theta)+\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$=\sin\theta\times(-\sin\theta)-(-\cos\theta)\times(-\cos\theta)+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=-\sin^2\theta-\cos^2\theta+\tan\theta$

$=-1+\tan\theta$ 답 ②

10 $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=-\cos\frac{3}{4}\pi$

$=-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\sqrt{3}$

$\therefore \cos\frac{5}{6}\pi-\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)-\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

다른풀이 $\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\sin\frac{11}{4}\pi=\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

11 $\sin89^\circ=\sin(90^\circ-1^\circ)=\cos1^\circ$

$\sin88^\circ=\sin(90^\circ-2^\circ)=\cos2^\circ$

$\sin87^\circ=\sin(90^\circ-3^\circ)=\cos3^\circ$

$\vdots$

$\sin46^\circ=\sin(90^\circ-44^\circ)=\cos44^\circ$

$\therefore \sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)$

$+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)$

$+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{44\text{개}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2$

$=44+\frac{1}{2}+1=\frac{91}{2}$ 답 ④

12 $\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\sin x$이므로

$y=4\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+3$

$=4\sin x-\sin x+3=3\sin x+3$

이때 $-1\le\sin x\le1$에서 $-3\le3\sin x\le3$, 즉

$0\le3\sin x+3\le6$이므로 이 함수의 최댓값은 6, 최솟값은 0이다.

따라서 $M=6$, $m=0$이므로

$M-m=6-0=6$ 답 ③

13 $y=\cos^2 x-4\sin x+2$

$=(1-\sin^2 x)-4\sin x+2$

$=-\sin^2 x-4\sin x+3$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

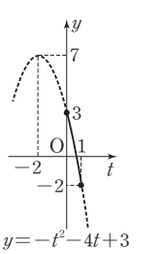
$0\le t\le1$이고

$y=-t^2-4t+3=-(t+2)^2+7$

$0\le t\le1$일 때, 이 함수는 $t=1$에서 최솟값

-2를 갖는다.

따라서 구하는 함수의 최솟값은 -2이다.



답 ④

참고 이차식 꼴로 주어진 삼각함수를 포함한 함수의 최대, 최소는 다음과 같이 구한다.

(i) 두 종류 이상의 삼각함수를 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

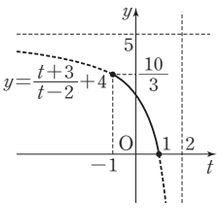
(ii) 삼각함수를 t로 치환하고 t의 값의 범위를 구한다.

(iii) 그래프를 이용하여 (ii)의 범위에서 최대, 최소를 구한다.

14 $y=\frac{\cos x+3}{\cos x-2}+4$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\frac{t+3}{t-2}+4=\frac{5}{t-2}+5$

$-1\le t\le1$일 때, 이 함수는 $t=-1$에서 최댓값 $\frac{10}{3}$, $t=1$에서 최솟값 0을 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{10}{3}+0=\frac{10}{3}$ 답 ⑤

15 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$에서 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7}{6}\pi$, 즉

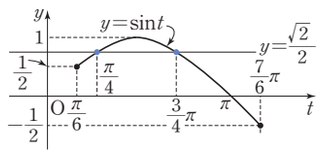
$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{7}{6}\pi$이고 $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{7}{6}\pi$에서 함수

$y=\sin t$의 그래프와 직선

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표는

오른쪽 그림과 같이



$t=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{3}{4}\pi$이므로

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{7}{12}\pi$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{12}+\frac{7}{12}\pi=\frac{2}{3}\pi$ 답 ①

16 $2\cos^2 x+\sin x-2=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+\sin x-2=0$

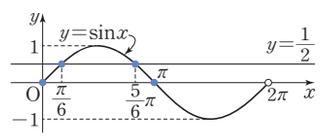
$-2\sin^2 x+\sin x=0$, $\sin x(2\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

(i) $\sin x=0$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

$x=0$ 또는 $x=\pi$



(ii) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

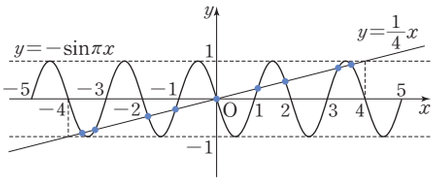
$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 $\alpha=\pi$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$, $\gamma=\frac{\pi}{6}$, $\delta=0$이므로

$\alpha+\beta-\gamma-\delta=\pi+\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}-0=\frac{5}{3}\pi$ 답 ②

17 방정식 $-\sin\pi x=\frac{1}{4}x$의 실근은 함수 $y=-\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=-\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고, 직선 $y=\frac{1}{4}x$는 두 점 $(4, 1)$, $(-4, -1)$을 지나므로 함수 $y=-\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=-\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 개수가 9이므로 방정식 $-\sin\pi x=\frac{1}{4}x$의 서로 다른 실근의 개수는 9이다. 답 ⑤

18 $8\sin^2x-4\cos x-k=0$에서

$8(1-\cos^2x)-4\cos x-k=0$, $8-8\cos^2x-4\cos x-k=0$

$\therefore -8\cos^2x-4\cos x+8=k$

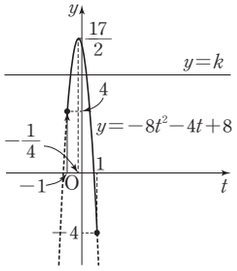
이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-8\cos^2x-4\cos x+8$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-8t^2-4t+8$

$=-8\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=-8t^2-4t+8$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재하도록 하는 k의 값의 범위는



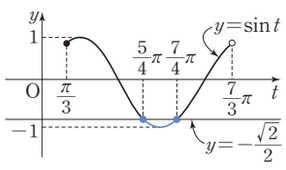
$-4\le k\le\frac{17}{2}$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, …, 8의 13개이다. 답 ④

19 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{2}\le 0$에서 $x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$, 즉 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고

$2\sin t+\sqrt{2}\le 0$ $\therefore \sin t\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$ …… ㉠

$\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 t의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$\frac{5}{4}\pi\le t\le\frac{7}{4}\pi$이므로

$\frac{5}{4}\pi\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{7}{4}\pi$ $\therefore \frac{11}{12}\pi\le x\le\frac{17}{12}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{11}{12}\pi$, $\beta=\frac{17}{12}\pi$이므로

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{11}{12}\pi+\frac{17}{12}\pi\right)=\sin\frac{7}{3}\pi$

$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ⑤

20 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로 $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\cos x\le 0$에서

$2\sin^2x+3\cos x\le 0$, $2(1-\cos^2x)+3\cos x\le 0$

$2-2\cos^2x+3\cos x\le 0$, $2\cos^2x-3\cos x-2\ge 0$

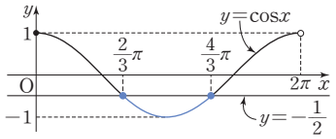
$(2\cos x+1)(\cos x-2)\ge 0$

이때 $\cos x-2<0$이므로

$2\cos x+1\le 0$, $2\cos x\le -1$

$\therefore \cos x\le-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 부등식 $\cos x\le-\frac{1}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서



$\frac{2}{3}\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$이므로

$\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$ 답 ④

참고 $-1\le\cos x\le 1$이므로 $-3\le\cos x-2\le -1$

21 이차방정식 $4x^2+4\sqrt{2}x\cos\theta-7\sin\theta+5=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sqrt{2}\cos\theta)^2-4(-7\sin\theta+5)\ge 0$

$8\cos^2\theta+28\sin\theta-20\ge 0$, $8(1-\sin^2\theta)+28\sin\theta-20\ge 0$

$8-8\sin^2\theta+28\sin\theta-20\ge 0$, $8\sin^2\theta-28\sin\theta+12\le 0$

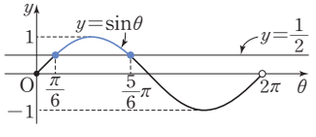
$2\sin^2\theta-7\sin\theta+3\le 0$, $(2\sin\theta-1)(\sin\theta-3)\le 0$

이때 $\sin\theta-3<0$이므로

$2\sin\theta-1\ge 0$, $2\sin\theta\ge 1$

$\therefore \sin\theta\ge\frac{1}{2}$ …… ㉠

$0\le\theta<2\pi$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 θ의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore \cos(\beta-\alpha)=\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}$ 답 ③

01 함수 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin\frac{\pi}{3}x$ $\therefore y=-\sin\frac{\pi}{3}x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-\frac{1}{2}=-\sin\left[\frac{\pi}{3}\left\{x-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}\right]$

$\therefore y=-\sin\left\{\frac{\pi}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right\}+\frac{1}{2}$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{4}, a\right)$를 지나므로

$a=-\sin\left\{\frac{\pi}{3}\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)\right\}+\frac{1}{2}=-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 ④

02 ① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $4+2=6$이다.

③ 최솟값은 $-4+2=-2$이다.

④ $x=0$일 때, $y=-4\sin\frac{3}{2}\pi+2=-4\times(-1)+2=6$이므로 그래프는 점 $(0, 6)$을 지난다.

⑤ $y=-4\sin\left(2x+\frac{3}{2}\pi\right)+2=-4\sin\left\{2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}+2$의 그래프는 함수 $y=-4\sin2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{4}\pi$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

03 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{2}$, $|a|=4$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

최댓값이 -1이므로 $2+b=-1$ $\therefore b=-3$

함수는 $y=2\cos4x-3$이므로 최솟값은

$-2-3=-5$ $\therefore m=-5$

$\therefore a-b-m=4-(-3)-(-5)=12$ 답 ⑤

04 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$2x-b=m\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{m}{2}\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}$ (단, m은 정수)

조건 (가)에서

$\frac{m}{2}\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=(n-m)\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n-m$: 정수)

그런데 $0<b<\pi$이므로 $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)=a\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+c$

조건 (나)에서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=c=4$

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=a\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+c=a\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4$

$=-a\tan\frac{\pi}{4}+4=-a+4=1$

$\therefore a=3$

$\therefore \frac{4ab}{\pi}+c=\frac{4\times3\times\frac{\pi}{2}}{\pi}+4=10$ 답 ⑤

05 그래프에서 함수 $y=a\sin\{\pi(x-b)\}+c$의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이므로

$|a|+c=2$, $-|a|+c=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $|a|=3$, $c=-1$

$\therefore a=3$, $c=-1$ ($\because a>0$)

함수 $y=3\sin\{\pi(x-b)\}-1$의 그래프가 점 $\left(\frac{11}{6}, 2\right)$를 지나므로

$2=3\sin\left\{\pi\left(\frac{11}{6}-b\right)\right\}-1$, $3\sin\left\{\pi\left(\frac{11}{6}-b\right)\right\}=3$

$\therefore \sin\left\{\pi\left(\frac{11}{6}-b\right)\right\}=1$

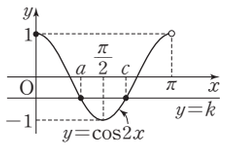
이때 $0<b<2$에서 $-2<-b<0$, $-\frac{1}{6}<\frac{11}{6}-b<\frac{11}{6}$

즉 $-\frac{\pi}{6}<\pi\left(\frac{11}{6}-b\right)<\frac{11}{6}\pi$이므로

$\pi\left(\frac{11}{6}-b\right)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{11}{6}-b=\frac{1}{2}$ $\therefore b=\frac{4}{3}$

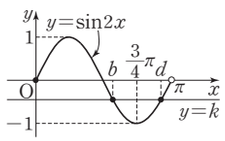
$\therefore abc=3\times\frac{4}{3}\times(-1)=-4$ 답 ④

06 오른쪽 그림에서 두 점 (a, k), (c, k)가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로



$\frac{a+c}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a+c=\pi$

오른쪽 그림에서 두 점 (b, k), (d, k)가 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로



$\frac{b+d}{2}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore b+d=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore a+b+c+d=(a+c)+(b+d)=\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$ 답 ③

07 함수 $y=4\cos\frac{\pi}{8}x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 두 점 B, C는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{BC}=4$이므로 B$(-2, 0)$, C$(2, 0)$

점 D의 x좌표가 2이므로 y좌표는

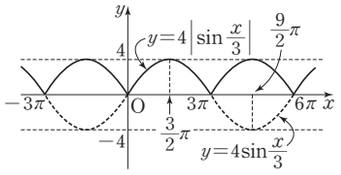
$y=4\cos\frac{\pi}{4}=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ $\therefore$ D$(2, 2\sqrt{2})$

$\therefore \overline{CD}=2\sqrt{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{BC}\times\overline{CD}=4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ 답 ⑤

08 함수 $y=4\sin\frac{x}{3}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$이고, 함수



$y=\left|4\sin\frac{x}{3}\right|=4\left|\sin\frac{x}{3}\right|$

의 그래프는 위의 그림과 같으므로 주기는 3π이다.

따라서 함수 $y=4\left|\sin\frac{x}{3}\right|+2$의 주기도 3π이다.

$\therefore a=3\pi$

위의 그림에서 $0\le4\left|\sin\frac{x}{3}\right|\le4$이므로

$2\le4\left|\sin\frac{x}{3}\right|+2\le6$

즉 함수 $y=4\left|\sin\frac{x}{3}\right|+2$의 치역은 $\{y|2\le y\le6\}$이므로

$b=2,\ c=6$

$\therefore abc=3\pi\times2\times6=36\pi$ 답 ④

참고 $-1\le\sin\frac{x}{3}\le1$이므로

$0\le\left|\sin\frac{x}{3}\right|\le1,\ 0\le4\left|\sin\frac{x}{3}\right|\le4$

$\therefore 2\le4\left|\sin\frac{x}{3}\right|+2\le6$

09 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\sin\theta}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}$

$=\frac{\cos\theta}{\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{-\sin\theta\times\sin\theta}{-\sin\theta}$

$=\cos\theta\tan\theta+\sin\theta$

$=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sin\theta$

$=\sin\theta+\sin\theta=2\sin\theta$ 답 ③

10 $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\tan\frac{3}{4}\pi=-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{13}{6}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\frac{\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}{\sin\frac{7}{6}\pi+\tan\frac{13}{6}\pi}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-3\sqrt{3}+6}{-3+2\sqrt{3}}$

$=\frac{(-3\sqrt{3}+6)(-3-2\sqrt{3})}{(-3+2\sqrt{3})(-3-2\sqrt{3})}$

$=\sqrt{3}$ 답 ①

11 $\cos\frac{4}{10}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{\pi}{10}$

$\cos\frac{3}{10}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{10}\pi\right)=\sin\frac{2}{10}\pi$

$\therefore\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{3}{10}\pi+\cos^2\frac{4}{10}\pi+\cos^2\frac{5}{10}\pi$

$=\left(\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{4}{10}\pi\right)+\left(\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{3}{10}\pi\right)$

$+\cos^2\frac{5}{10}\pi$

$=\left(\cos^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}\right)+\left(\cos^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{2}{10}\pi\right)+\cos^2\frac{\pi}{2}$

$=1+1+0=2$ 답 ④

12 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-2\le2\sin x\le2,\ -1\le2\sin x+1\le3,\ 0\le|2\sin x+1|\le3$

$0\le a|2\sin x+1|\le3a\ (\because a>0)$

$\therefore b\le a|2\sin x+1|+b\le3a+b$

따라서 함수 $y=a|2\sin x+1|+b$의 최댓값은 $3a+b$, 최솟값은 b이므로

$3a+b=16,\ b=-2$

$\therefore a=6,\ b=-2$

$\therefore a+b=6+(-2)=4$ 답 ③

13 $y=\sin^2x+\cos x+5$

$=(1-\cos^2x)+\cos x+5$

$=-\cos^2x+\cos x+6$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고

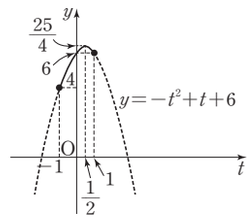
$y=-t^2+t+6=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

$-1\le t\le1$일 때, 이 함수는

$t=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{25}{4}$,

$t=-1$에서 최솟값 4를 갖는다.

따라서 $M=\frac{25}{4}$, $m=4$이므로



$Mm=\frac{25}{4}\times4=25$ 답 ⑤

14 $y=\frac{\sin x+a}{\sin x-2}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\frac{t+a}{t-2}=\frac{a+2}{t-2}+1$

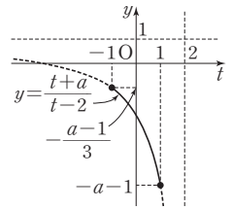
$-1\le t\le1$일 때, 이 함수는

$t=-1$에서 최댓값 $-\frac{a-1}{3}$,

$t=1$에서 최솟값 $-a-1$

을 갖는다. 이때 최댓값이 -1이므로

$-\frac{a-1}{3}=-1,\ a-1=3\quad\therefore a=4$

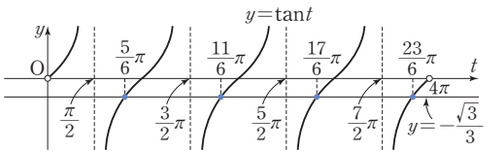


따라서 최솟값은 $-4-1=-5$ 답 ③

15 $3\tan 2x+\sqrt{3}=0$에서 $\tan 2x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$2x=t$로 놓으면 $0<x<2\pi$에서 $0<2x<4\pi$, 즉

$0<t<4\pi$이고 $\tan t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$



$0<t<4\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 t좌표는 위의 그림에서

$t=\frac{5}{6}\pi$, $t=\frac{11}{6}\pi$, $t=\frac{17}{6}\pi$, $t=\frac{23}{6}\pi$

이므로

$2x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{17}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{23}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

따라서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 차는

$\frac{23}{12}\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 답 ③

16 $\sin^2x-\cos^2x=0$에서

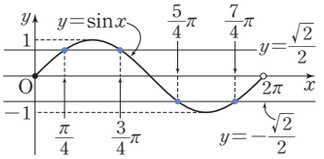
$\sin^2x-(1-\sin^2x)=0$, $2\sin^2x=1$

$\sin^2x=\frac{1}{2}$ $\therefore \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$



(ii) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=4\pi$ 답 ④

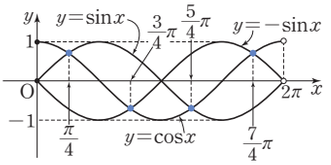
다른풀이 $\sin^2x-\cos^2x=0$에서

$(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)=0$

(i) $\sin x=\cos x$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$



(ii) $-\sin x=\cos x$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

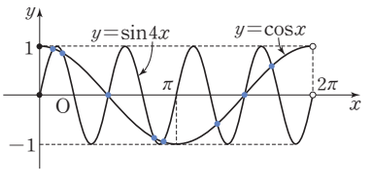
$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=4\pi$

17 방정식 $\sin 4x=\cos x$의 실근은 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고, 함수 $y=\cos x$의 주기는 2π, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$일 때, 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 개수가 8이므로 $0\le x<2\pi$에서 방정식 $\sin 4x=\cos x$의 서로 다른 실근의 개수는 8이다. 답 ⑤

18 $4\cos^2x+2\sin x+a=0$에서

$4(1-\sin^2x)+2\sin x+a=0$, $-4\sin^2x+2\sin x+a+4=0$

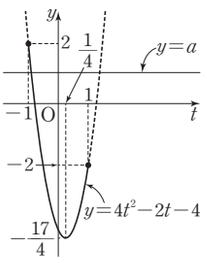
$\therefore 4\sin^2x-2\sin x-4=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=4\sin^2x-2\sin x-4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=4t^2-2t-4=4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{4}$

오른쪽 그림과 같이 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=4t^2-2t-4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재하도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$-\frac{17}{4}\le a\le 2$

따라서 $M=2$, $m=-\frac{17}{4}$이므로

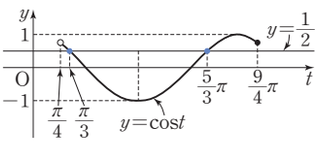
$M+m=2+\left(-\frac{17}{4}\right)=-\frac{9}{4}$ 답 ⑤

19 $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$에서 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{1}{2}$

$x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0<x\le 2\pi$에서 $\frac{\pi}{4}<t\le\frac{9}{4}\pi$이고

$\cos t\le\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\frac{\pi}{4}<t\le\frac{9}{4}\pi$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 t의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{5}{3}\pi$이므로

$\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{3}\pi$ $\therefore \frac{\pi}{12}\le x\le\frac{17}{12}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{12}$, $\beta=\frac{17}{12}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{17}{12}\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{4}{3}\pi$ 답 ④

20 $\sqrt{3}\tan^2x+2\tan x\le\sqrt{3}$에서

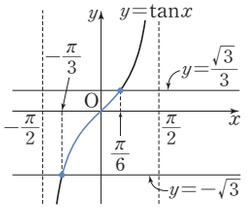
$\sqrt{3}\tan^2x+2\tan x-\sqrt{3}\le0$

$(\tan x+\sqrt{3})(\sqrt{3}\tan x-1)\le0$

$\therefore -\sqrt{3}\le\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ …… ㉠

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는 오른쪽 그림에서

$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$이므로



$\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$

답 ③

21 이차방정식 $6x^2+4x\sin\theta-\cos\theta=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-6\times(-\cos\theta)<0$

$4\sin^2\theta+6\cos\theta<0$

$4(1-\cos^2\theta)+6\cos\theta<0$

$4-4\cos^2\theta+6\cos\theta<0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2>0$

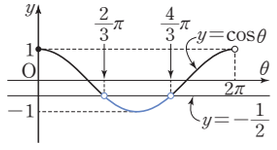
$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)>0$

이때 $\cos\theta-2<0$이므로

$2\cos\theta+1<0$, $2\cos\theta<-1$

$\therefore \cos\theta<-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$0\le\theta<2\pi$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 θ의 값의 범위는 오른쪽 그림에서 $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$이므로



$\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi}{2}=\pi$

답 ③

변형유형 집중공략

p.16~17

1-1 $16\theta=2\pi$이므로

$\sin15\theta=\sin(16\theta-\theta)=\sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$,

$\sin14\theta=\sin(16\theta-2\theta)=\sin(2\pi-2\theta)$

$=\sin(-2\theta)=-\sin2\theta$,

$\sin13\theta=\sin(16\theta-3\theta)=\sin(2\pi-3\theta)$

$=\sin(-3\theta)=-\sin3\theta$,

$\sin12\theta=\sin(16\theta-4\theta)=\sin(2\pi-4\theta)$

$=\sin(-4\theta)=-\sin4\theta$,

$\sin11\theta=\sin(16\theta-5\theta)=\sin(2\pi-5\theta)$

$=\sin(-5\theta)=-\sin5\theta$,

$\sin10\theta=\sin(16\theta-6\theta)=\sin(2\pi-6\theta)$

$=\sin(-6\theta)=-\sin6\theta$,

$\sin9\theta=\sin(16\theta-7\theta)=\sin(2\pi-7\theta)$

$=\sin(-7\theta)=-\sin7\theta$

$\therefore \sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin15\theta$

$=\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\sin4\theta$

$+\sin5\theta+\sin6\theta+\sin7\theta+\sin\pi$

$+(-\sin7\theta)+(-\sin6\theta)+(-\sin5\theta)+(-\sin4\theta)$

$+(-\sin3\theta)+(-\sin2\theta)+(-\sin\theta)$

$=0$

$\therefore a=0$

또 $8\theta=\pi$이므로

$\cos15\theta=\cos(8\theta+7\theta)=\cos(\pi+7\theta)=-\cos7\theta$,

$\cos14\theta=\cos(8\theta+6\theta)=\cos(\pi+6\theta)=-\cos6\theta$,

$\cos13\theta=\cos(8\theta+5\theta)=\cos(\pi+5\theta)=-\cos5\theta$,

$\cos12\theta=\cos(8\theta+4\theta)=\cos(\pi+4\theta)=-\cos4\theta$,

$\cos11\theta=\cos(8\theta+3\theta)=\cos(\pi+3\theta)=-\cos3\theta$,

$\cos10\theta=\cos(8\theta+2\theta)=\cos(\pi+2\theta)=-\cos2\theta$,

$\cos9\theta=\cos(8\theta+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos15\theta$

$=\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cos4\theta$

$+\cos5\theta+\cos6\theta+\cos7\theta+\cos\pi$

$+(-\cos\theta)+(-\cos2\theta)+(-\cos3\theta)+(-\cos4\theta)$

$+(-\cos5\theta)+(-\cos6\theta)+(-\cos7\theta)$

$=-1$

$\therefore b=-1$

$\therefore a-b=0-(-1)=1$

답 1

1-2 $\angle P_1OP=\angle P_2OP_1=\angle P_3OP_2=\cdots=\angle QOP_{14}=\frac{90^\circ}{15}=6^\circ$

$\overline{OQ_1}=\overline{OP_1}\cos6^\circ=\cos6^\circ$,

$\overline{OQ_2}=\overline{OP_2}\cos12^\circ=\cos12^\circ$,

$\overline{OQ_3}=\overline{OP_3}\cos18^\circ=\cos18^\circ$,

⋮

$\overline{OQ_{14}}=\overline{OP_{14}}\cos84^\circ=\cos84^\circ$

이때

$\overline{OQ_{14}}=\cos84^\circ=\cos(90^\circ-6^\circ)=\sin6^\circ$,

$\overline{OQ_{13}}=\cos78^\circ=\cos(90^\circ-12^\circ)=\sin12^\circ$,

$\overline{OQ_{12}}=\cos72^\circ=\cos(90^\circ-18^\circ)=\sin18^\circ$,

$\overline{OQ_{11}}=\cos66^\circ=\cos(90^\circ-24^\circ)=\sin24^\circ$,

$\overline{OQ_{10}}=\cos60^\circ=\cos(90^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ$,

$\overline{OQ_9}=\cos54^\circ=\cos(90^\circ-36^\circ)=\sin36^\circ$,

$\overline{OQ_8}=\cos48^\circ=\cos(90^\circ-42^\circ)=\sin42^\circ$

이므로

$\overline{OQ_1}^2+\overline{OQ_2}^2+\overline{OQ_3}^2+\cdots+\overline{OQ_{14}}^2$

$=\cos^2 6^\circ+\cos^2 12^\circ+\cos^2 18^\circ+\cdots+\cos^2 84^\circ$

$=(\cos^2 6^\circ+\cos^2 84^\circ)+(\cos^2 12^\circ+\cos^2 78^\circ)$

$+(\cos^2 18^\circ+\cos^2 72^\circ)+(\cos^2 24^\circ+\cos^2 66^\circ)$

$+(\cos^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ)+(\cos^2 36^\circ+\cos^2 54^\circ)$

$+(\cos^2 42^\circ+\cos^2 48^\circ)$

$=(\cos^2 6^\circ+\sin^2 6^\circ)+(\cos^2 12^\circ+\sin^2 12^\circ)$

$+(\cos^2 18^\circ+\sin^2 18^\circ)+(\cos^2 24^\circ+\sin^2 24^\circ)$

$+(\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ)+(\cos^2 36^\circ+\sin^2 36^\circ)$

$+(\cos^2 42^\circ+\sin^2 42^\circ)$

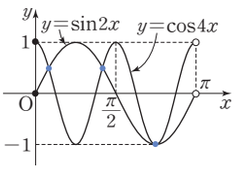
$=1+1+1+1+1+1+1$

$=7$ 답 7

2-1 $\cos 4x-\sin 2x=0$에서 $\cos 4x=\sin 2x$

$0\le x<\pi$에서 방정식 $\cos 4x=\sin 2x$의 실근은 두 함수 $y=\cos 4x$, $y=\sin 2x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=\cos 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고, 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로 $0\le x<\pi$에서 두 함수 $y=\cos 4x$, $y=\sin 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



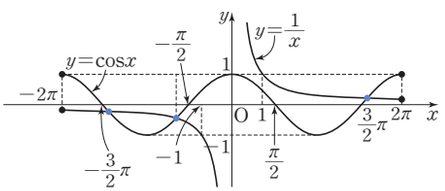
따라서 $0\le x<\pi$일 때, 두 함수 $y=\cos 4x$, $y=\sin 2x$의 그래프의 교점의 개수가 3이므로 방정식 $\cos 4x-\sin 2x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 ③

2-2 $x\cos x=1$에서

$x=0$일 때, $0\ne 1$이므로 $x=0$은 근이 아니다.

$x\ne 0$일 때, $x\cos x=1$에서 $\cos x=\frac{1}{x}$

이 방정식의 실근은 두 함수 $y=\cos x$, $y=\frac{1}{x}$의 그래프의 교점의 x좌표와 같고, $-2\pi\le x\le 2\pi$에서 두 함수 $y=\cos x$, $y=\frac{1}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $-2\pi\le x\le 2\pi$일 때, 두 함수 $y=\cos x$, $y=\frac{1}{x}$의 그래프의 교점의 개수가 3이므로 방정식 $x\cos x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 ③

서술형 What & How

p.18~21

1 그래프에서 함수 $y=a\sin bx+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$|a|+c=3$, $-|a|+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $|a|=2$, $c=1$

$\therefore a=2$, $c=1$ ($\because a>0$) …… ❶

또 주기가 $\frac{5}{8}\pi-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$, $|b|=4$ $\therefore b=4$ ($\because b>0$) …… ❷

$\therefore abc=2\times 4\times 1=8$ …… ❸

답 8

2 그래프에서 함수 $y=a\sin\{b(x-c)\}+d$의 최댓값이 5, 최솟값이 -1이므로

$|a|+d=5$, $-|a|+d=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $|a|=3$, $d=2$

$\therefore a=3$, $d=2$ ($\because a>0$) …… ❶

또 주기가 $\frac{13}{12}-\frac{1}{12}=1$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=1$, $|b|=2\pi$ $\therefore b=2\pi$ ($\because b>0$) …… ❷

함수 $y=3\sin\{2\pi(x-c)\}+2$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{12},\ 5\right)$를 지나므로

$5=3\sin\left\{2\pi\left(\frac{1}{12}-c\right)\right\}+2$, $3\sin\left\{2\pi\left(\frac{1}{12}-c\right)\right\}=3$

$\therefore \sin\left\{2\pi\left(\frac{1}{12}-c\right)\right\}=1$

이때 $0<c<1$에서 $-1<-c<0$

$-\frac{11}{12}<\frac{1}{12}-c<\frac{1}{12}$, 즉 $-\frac{11}{6}\pi<2\pi\left(\frac{1}{12}-c\right)<\frac{\pi}{6}$이므로

$2\pi\left(\frac{1}{12}-c\right)=-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{12}-c=-\frac{3}{4}$

$\therefore c=\frac{5}{6}$ …… ❸

$\therefore \frac{abcd}{\pi}=\frac{3\times 2\pi\times\frac{5}{6}\times 2}{\pi}=10$ …… ❹

답 10

채점기준	배점
❶ a, d의 값 구하기	2
❷ b의 값 구하기	1
❸ c의 값 구하기	2
❹ $\frac{abcd}{\pi}$의 값 구하기	1

3 $\sin^2 x+4\cos x+a=0$에서 $(1-\cos^2 x)+4\cos x+a=0$

$\therefore \cos^2 x-4\cos x-1=a$

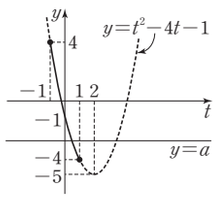
이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\cos^2 x-4\cos x-1$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다. …… ❶

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-4t-1=(t-2)^2-5$

오른쪽 그림과 같이 $-1\le t\le 1$에서

함수 $y=(t-2)^2-5$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재하도록 하는 a의 값의 범위는



$-4\le a\le 4$ …… ❷

따라서 $m=-4$, $n=4$이므로

$n-m=4-(-4)=8$ …… ❸

답 8

4 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\cos(\pi+x)=-\cos x$이므로

$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2\cos(\pi+x)+k=0$에서

$\sin^2 x-2\cos x+k=0$, $(1-\cos^2 x)-2\cos x+k=0$

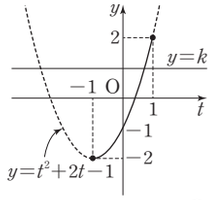
$\therefore \cos^2 x+2\cos x-1=k$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\cos^2 x+2\cos x-1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다. …… ❶

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

오른쪽 그림과 같이 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=t^2+2t-1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재하도록 하는 k의 값의 범위는



$-2\le k\le 2$ …… ❷

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. …… ❸

답 5

채점기준	배점
❶ 방정식이 실근을 가질 조건 설명하기	2
❷ k의 값의 범위 구하기	3
❸ 정수 k의 개수 구하기	1

5 $y=-a\sin^2 x+a\cos x+b$

$=-a(1-\cos^2 x)+a\cos x+b$

$=a\cos^2 x+a\cos x-a+b$ …… ❶

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=at^2+at-a+b$

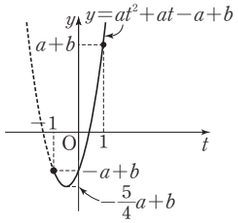
$=a\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}a+b$ …… ❷

$-1\le t\le 1$일 때, 이 함수는

$t=1$에서 최댓값 $a+b$,

$t=-\frac{1}{2}$에서 최솟값 $-\frac{5}{4}a+b$

를 갖는다. 이때 최댓값이 11, 최솟값이 -7이므로



$a+b=11$, $-\frac{5}{4}a+b=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=3$ …… ❸

$\therefore ab=8\times 3=24$ …… ❹

답 24

6 $x+\frac{3}{4}\pi=\theta$로 놓으면 $x=\theta-\frac{3}{4}\pi$이므로

$y=\cos^2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$=\cos^2\theta-\sin\left(\theta-\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$=\cos^2\theta-\sin(\theta-\pi)+k$

$=\cos^2\theta+\sin(\pi-\theta)+k$

$=\cos^2\theta+\sin\theta+k$

$=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta+k$

$=-\sin^2\theta+\sin\theta+k+1$ …… ❶

이때 $\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

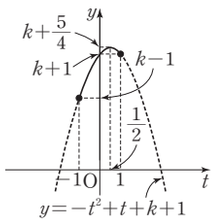
$y=-t^2+t+k+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$ …… ❷

$-1\le t\le 1$일 때, 이 함수는

$t=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $k+\frac{5}{4}$,

$t=-1$에서 최솟값 $k-1$

을 갖는다. 이때 최댓값이 $\frac{25}{4}$이므로



$k+\frac{5}{4}=\frac{25}{4}$ $\therefore k=5$

따라서 최솟값은

$k-1=5-1=4$ $\therefore m=4$ …… ❸

$\therefore k+m=5+4=9$ …… ❹

답 9

채점기준	배점
❶ 주어진 함수를 $\sin\theta$에 대한 함수로 나타내기	2
❷ $\sin\theta=t$로 놓고 ❶의 함수를 t에 대한 이차함수로 나타내기	1
❸ k, m의 값 구하기	2
❹ $k+m$의 값 구하기	1

7 유속이 $5\sqrt{2}$ m/s 이상일 때에만 조류 발전이 가능하므로

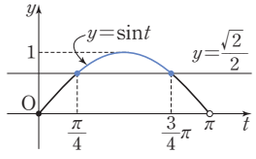
$f(x)\ge 5\sqrt{2}$에서 $10\sin\frac{\pi}{24}x\ge 5\sqrt{2}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{24}x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ …… ❶

$\frac{\pi}{24}x=t$로 놓으면 $0\le x<24$에서 $0\le\frac{\pi}{24}x<\pi$, 즉 $0\le t<\pi$이고

$\sin t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le t<\pi$에서 $\sin t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 t의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3}{4}\pi$ …… ❷

이므로

$\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{24}x\le\frac{3}{4}\pi$ $\therefore 6\le x\le 18$ …… ❸

따라서 조류 발전이 가능한 시간은 총 18−6=12(시간)이므로
$N=12$ …… ❹

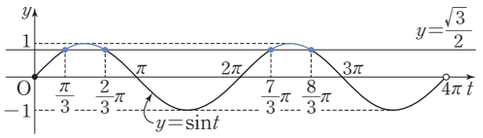
답 12

8 해수면의 높이가 $10\sqrt{3}$ m 이상일 때에만 여객선을 댈 수 있으므로
$h(x)\geq 10\sqrt{3}$에서 $6\sqrt{3}+8\sin\frac{\pi}{6}x\geq 10\sqrt{3}$

$8\sin\frac{\pi}{6}x\geq 4\sqrt{3}$ $\therefore \sin\frac{\pi}{6}x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ❶

$\frac{\pi}{6}x=t$로 놓으면 $0\leq x<24$에서 $0\leq\frac{\pi}{6}x<4\pi$

즉 $0\leq t<4\pi$이고 $\sin t\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$



$0\leq t<4\pi$에서 부등식 $\sin t\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 t의 값의 범위는
위의 그림에서

$\frac{\pi}{3}\leq t\leq\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{7}{3}\pi\leq t\leq\frac{8}{3}\pi$ …… ❷

이므로

$\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{6}x\leq\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{7}{3}\pi\leq\frac{\pi}{6}x\leq\frac{8}{3}\pi$

$\therefore 2\leq x\leq 4$ 또는 $14\leq x\leq 16$ …… ❸

따라서 여객선을 댈 수 있는 시간은 2시에서 4시까지 2시간, 14시에서 16시까지 2시간이므로 하루에 최대 2+2=4(시간)이다.
$\therefore M=4$ …… ❹

답 4

채점기준	배점
❶ 삼각부등식 세우기	1
❷ $\frac{\pi}{6}x=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기	3
❸ x의 값의 범위 구하기	1
❹ M의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회 p.22~25

01 함수 $y=2\tan 3x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\tan\left\{3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+1=2\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=2\tan\left(-3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

이것이 $y=2\tan\left(ax-\frac{\pi}{2}\right)+b$와 일치하므로

$a=-3$, $b=1$

$\therefore a+b=-3+1=-2$

답 ④

02 ㄱ. 함수 $y=2\cos 4x+1$의 그래프는 함수 $y=\cos 4x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 그래프가 아니다.

ㄴ. $y=\cos(4x+2\pi)-2=\cos\left\{4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}-2$

이므로 함수 $y=\cos(4x+2\pi)-2$의 그래프는 함수 $y=\cos 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=-\cos 4x-\pi$의 그래프는 함수 $y=\cos 4x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\sin 4x=-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left\{4\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}$

이므로 함수 $y=\sin 4x$의 그래프는 함수 $y=\cos 4x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{8}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\cos 4x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 그래프의 식인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

03 함수 $y=|\cos 2x|$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

ㄱ. 함수 $y=|\tan x|$의 주기는 π

ㄴ. 함수 $y=3|\cos 4x|+1$의 주기는 $\frac{\pi}{4}$

ㄷ. 함수 $y=-2\sin 4x+3$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

따라서 함수 $y=|\cos 2x|$와 주기가 같은 함수는 ㄷ이다. 답 ②

참고 함수 $y=|\sin x|$, $y=|\cos x|$, $y=|\tan x|$의 주기는 모두 π이므로 $y=|\sin ax|$, $y=|\cos ax|$, $y=|\tan ax|$의 주기는 모두 $\frac{\pi}{|a|}$이다. (단, $a\neq 0$)

04 $f(x)=3\tan(5\pi-x)=3\tan(-x)=-3\tan x$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 π이므로 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x+\pi)$ (참)

ㄴ. $f(-x)=-3\tan(-x)=3\tan x=-f(x)$
즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
(거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이므로
$|a|+c=3$ $\therefore a+c=3$ ($\because a>0$) …… ㉠
주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$, $|b|=2$ $\therefore b=2$ ($\because b>0$)

$\therefore f(x)=a\sin 2x+c$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$이므로 $a\sin\frac{\pi}{6}+c=1$

$\frac{1}{2}a+c=1 \quad \therefore a+2c=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

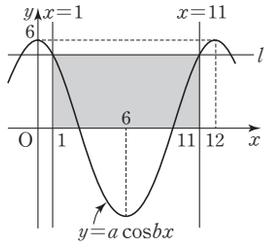
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $c=-1$

$\therefore abc=4\times 2\times(-1)=-8$ 답 ③

06 오른쪽 그림에서 함수 $y=a\cos bx$의 주기는 12이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=12$, $|b|=\frac{\pi}{6}$

$\therefore b=\frac{\pi}{6}$ ($\because b>0$)



한편 직사각형의 넓이가 $30\sqrt{3}$이고 가로의 길이가 $11-1=10$이므로 세로의 길이는 $3\sqrt{3}$이다.

따라서 함수 $y=a\cos\frac{\pi}{6}x$의 그래프는 점 $(1, 3\sqrt{3})$을 지나므로

$3\sqrt{3}=a\cos\frac{\pi}{6}$, $3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \therefore a=6$

$\therefore ab=6\times\frac{\pi}{6}=\pi$ 답 ③

07 $0<\theta<2\pi$이고, 조건 ㈎에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

조건 ㈏에서 $7\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$6\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{n}{3}\pi$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\frac{3}{2}\pi<\frac{n}{3}\pi<2\pi$

$9<2n<12 \quad \therefore \frac{9}{2}<n<6$

n은 정수이므로 $n=5 \quad \therefore \theta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta+\cos\theta$

$=2\cos\theta=2\cos\frac{5}{3}\pi$

$=2\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}$

$=2\times\frac{1}{2}=1$ 답 ④

08 $a=\tan\theta$이고

$\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(2\pi+\theta)}-\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}$

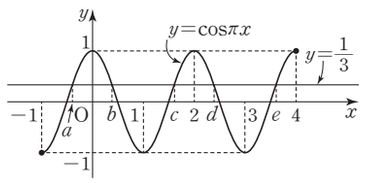
$=\tan\theta+\tan\theta$

$=2\tan\theta$

이므로 $2\tan\theta=6 \quad \therefore \tan\theta=3$

$\therefore a=3$ 답 ③

09



함수 $y=\cos\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 위의 그림에서

$\frac{b+c}{2}=1$, $\frac{d+e}{2}=3$

$\therefore b+c=2$, $d+e=6$

$\therefore \cos\{\pi(a+b+c+d+e)\}=\cos\{\pi(a+2+6)\}$

$=\cos\{\pi(a+8)\}$

$=\cos(a\pi+8\pi)$

$=\cos a\pi=\frac{1}{3}$ 답 ④

10 $\cos^2 89^\circ=\cos^2(90^\circ-1^\circ)=\sin^2 1^\circ$,

$\cos^2 88^\circ=\cos^2(90^\circ-2^\circ)=\sin^2 2^\circ$,

$\cos^2 87^\circ=\cos^2(90^\circ-3^\circ)=\sin^2 3^\circ$,

$\vdots$

$\cos^2 46^\circ=\cos^2(90^\circ-44^\circ)=\sin^2 44^\circ$

$\therefore \cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)$

$+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)$

$+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{44\text{개}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$

따라서

$2^{\cos^2 1^\circ}\times 2^{\cos^2 2^\circ}\times 2^{\cos^2 3^\circ}\times\cdots\times 2^{\cos^2 89^\circ}=2^{\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ}$

$=2^{\frac{89}{2}}$

이므로 $k=\frac{89}{2}$ 답 ⑤

11 $y=a\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+b$

$=a\cos x+\cos x+b$

$=(a+1)\cos x+b$

이 함수의 최댓값이 8, 최솟값이 2이므로

$a+1+b=8$, $-(a+1)+b=2$ ($\because a+1>0$)

$\therefore a+b=7$, $-a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$

$\therefore ab=2\times 5=10$ 답 ⑤

12 $y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2 x-6\cos(2\pi+x)$

$=2\cos^2 x+(1-\cos^2 x)-6\cos x$

$=\cos^2 x-6\cos x+1$

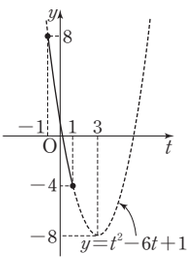
이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

$-1\le t\le 1$일 때, 이 함수는 $t=-1$에서 최댓값 8, $t=1$에서 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 $M=8$, $m=-4$이므로

$M-m=8-(-4)=12$ 답 ①



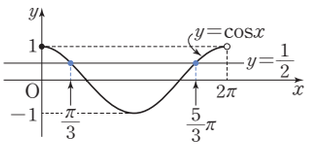
13 $\sin(\pi\cos x)=1$에서 $\pi\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서

$-1\le\cos x\le 1$, 즉 $-\pi\le\pi\cos x\le\pi$이므로 $-\pi\le t\le\pi$이고

$\sin t=1$

$-\pi\le t\le\pi$에서 $\sin t=1$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{\pi}{2}$이므로

$\pi\cos x=\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}$



$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

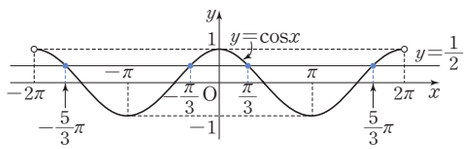
따라서 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$ 답 ③

14 $2\cos^2x+5\cos x-3=0$에서

$(2\cos x-1)(\cos x+3)=0$

$\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}$ ($\because\ -1\le\cos x\le 1$)



$-2\pi<x<2\pi$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값은 위의 그림에서

$x=-\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

15 $x-\frac{2}{3}\pi=\theta$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{2}{3}\pi\le x-\frac{2}{3}\pi<\frac{4}{3}\pi$,

즉 $-\frac{2}{3}\pi\le\theta<\frac{4}{3}\pi$이고, $x=\frac{2}{3}\pi+\theta$이므로

$2\cos^2\left(\frac{7}{6}\pi-x\right)+5\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+2>0$에서

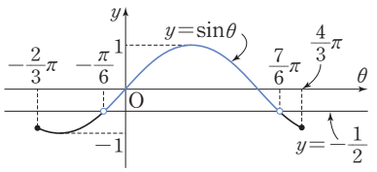
$2\cos^2\left\{\frac{7}{6}\pi-\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)\right\}+5\sin\theta+2>0$

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+5\sin\theta+2>0$

$2\sin^2\theta+5\sin\theta+2>0$, $(\sin\theta+2)(2\sin\theta+1)>0$

이때 $\sin\theta+2>0$이므로

$2\sin\theta+1>0$, $2\sin\theta>-1$ $\therefore\ \sin\theta>-\frac{1}{2}$



$-\frac{2}{3}\pi\le\theta<\frac{4}{3}\pi$일 때, 부등식 $\sin\theta>-\frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 값의 범위는 위의 그림에서

$-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{7}{6}\pi$이므로 $-\frac{\pi}{6}<x-\frac{2}{3}\pi<\frac{7}{6}\pi$

$\therefore\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{11}{6}\pi$ 답 ③

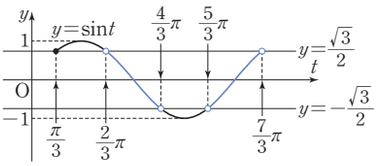
16 $2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고

$4\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3<0$에서 $4\sin^2t-3<0$

$(2\sin t+\sqrt{3})(2\sin t-\sqrt{3})<0$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin t<\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

$\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$일 때, 부등식 ㉠을 만족시키는 t의 값의 범위는 다음 그림과 같다.



$\frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<t<\frac{7}{3}\pi$이므로

$\frac{2}{3}\pi<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

$\therefore\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$ 답 ④

17 이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}x\cos\theta-3\sin\theta=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\cos\theta)^2-1\times(-3\sin\theta)>0$, $2\cos^2\theta+3\sin\theta>0$

$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta>0$, $-2\sin^2\theta+3\sin\theta+2>0$

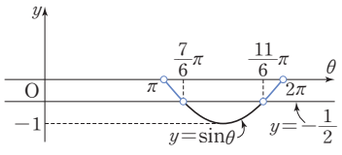
$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2<0$

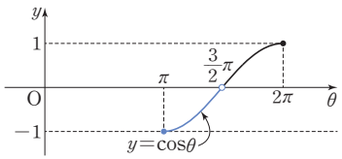
$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)<0$

이때 $\sin\theta-2<0$이므로 $2\sin\theta+1>0$

$2\sin\theta>-1$ $\therefore\ \sin\theta>-\frac{1}{2}$ …… ㉠

또 이차방정식의 두 실근의 합과 곱이 모두 양수이어야 하므로
근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=-2\sqrt{2}\cos\theta>0$ $\therefore \cos\theta<0$ …… ㉡
(두 근의 곱)$=-3\sin\theta>0$ $\therefore \sin\theta<0$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{1}{2}<\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$





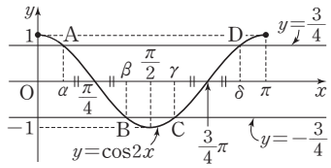
이때 $\pi\le\theta\le2\pi$이므로 $-\frac{1}{2}<\sin\theta<0$에서
$\pi<\theta<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$ …… ㉣
$\cos\theta<0$에서 $\pi\le\theta<\frac{3}{2}\pi$ …… ㉤
㉣, ㉤의 공통부분을 구하면
$\pi<\theta<\frac{7}{6}\pi$ 답 ①

18 $\cos^2\theta+6\sin\theta-a+4\le0$에서
$(1-\sin^2\theta)+6\sin\theta-a+4\le0$
$\therefore \sin^2\theta-6\sin\theta+a-5\ge0$
이때 $\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고
$t^2-6t+a-5\ge0$
$f(t)=t^2-6t+a-5=(t-3)^2+a-14$라 하면
$-1\le t\le1$일 때, 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 $a-10$을 갖는다.
따라서 $-1\le t\le1$일 때, 부등식 $f(t)\ge0$이 성립하려면
$a-10\ge0$ $\therefore a\ge10$
따라서 실수 a의 최솟값은 10이다. 답 ⑤

19 $y=-\cos(2\pi x+9\pi)=-\cos(2\pi x+\pi)$
$=-(-\cos2\pi x)=\cos2\pi x$
이때 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=\cos A$이므로
$\sin\left(\frac{n}{2}\pi+2\pi x\right)=\cos2\pi x$가 성립하려면
$\frac{n}{2}\pi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k는 정수)
$\frac{n}{2}=2k+\frac{1}{2}$ $\therefore n=4k+1$ …… ㉠
n은 20 이하의 자연수이므로 $1\le4k+1\le20$
$0\le4k\le19$ $\therefore 0\le k\le\frac{19}{4}$
k는 정수이므로 $k=0, 1, 2, 3, 4$
이것을 ㉠에 대입하면 $n=1, 5, 9, 13, 17$
따라서 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은
$1+5+9+13+17=45$ 답 ③

20 $18\theta=2\pi$, $9\theta=\pi$이므로
$\sin10\theta=\sin(9\theta+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\sin11\theta=\sin(9\theta+2\theta)=\sin(\pi+2\theta)=-\sin2\theta$
$\sin12\theta=\sin(9\theta+3\theta)=\sin(\pi+3\theta)=-\sin3\theta$
⋮
$\sin17\theta=\sin(9\theta+8\theta)=\sin(\pi+8\theta)=-\sin8\theta$
$\therefore \sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin18\theta$
$=\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin8\theta+\sin\pi$
$+(-\sin\theta)+(-\sin2\theta)+(-\sin3\theta)$
$+\cdots+(-\sin8\theta)+\sin2\pi$
$=0+0=0$ 답 ③

21



함수 $y=\cos2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고 위의 그림에서 두 점
$(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$은 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ …… ❶
두 점 $(\beta, 0)$, $(\gamma, 0)$은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로
$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \beta+\gamma=\pi$ …… ❷
두 점 $(\gamma, 0)$, $(\delta, 0)$은 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로
$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore \gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$ …… ❸
$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$
$=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi$
$\therefore k=3$ …… ❹
답 3

채점기준	배점
❶ $\alpha+\beta$의 값 구하기	1
❷ $\beta+\gamma$의 값 구하기	1
❸ $\gamma+\delta$의 값 구하기	1
❹ k의 값 구하기	2

22 $v=40$, $D=80$, $\theta=a$이므로
$80=\frac{40^2\times\sin2a}{10}$, $80=\frac{1600\times\sin2a}{10}$
$\therefore \sin2a=\frac{1}{2}$ …… ❶
$2a=t$로 놓으면 $0<a<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2a<\frac{\pi}{2}$, 즉 $0<t<\frac{\pi}{2}$이고
$\sin t=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, ㉠을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{\pi}{6}$이므로

$2a=\frac{\pi}{6}$ $\therefore a=\frac{\pi}{12}$ …… ❷

$\therefore \frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{12}}=12$ …… ❸

답 12

채점기준	배점
❶ a에 대한 삼각방정식 세우기	2
❷ a의 값 구하기	2
❸ $\frac{\pi}{a}$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회 p.26~29

01 ① 최댓값은 $|2|+4=6$이다.

② 최솟값은 $-|2|+4=2$이다.

③ 주기는 $\frac{2\pi}{|6|}=\frac{\pi}{3}$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f(x)$이다.

④ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}+4=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

점 $\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$를 지난다.

⑤ $f(x)=2\cos(6x-\pi)+4=2\cos\left\{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+4$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2\cos6x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

02 함수 $y=4\cos ax+b$의 주기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{4}$, $|a|=8$ $\therefore a=8$ ($\because a>0$)

최댓값이 3이므로

$4+b=3$ $\therefore b=-1$

따라서 함수 $y=4\cos8x-1$의 최솟값은

$-4-1=-5$ $\therefore m=-5$

$\therefore a+b+m=8+(-1)+(-5)=2$ 답 ②

03 함수 $y=a\cos bx$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a\cos\{b(x-p)\}+q$

이 함수의 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로

$|a|+q=6$, $-|a|+q=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $|a|=4$, $q=2$

$\therefore a=4$, $q=2$ ($\because a>0$)

함수 $y=4\cos\{b(x-p)\}+2$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$, $|b|=2$ $\therefore b=2$ ($\because b>0$)

$\therefore y=4\cos\{2(x-p)\}+2$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 6\right)$을 지나므로

$6=4\cos\left\{2\left(\frac{\pi}{4}-p\right)\right\}+2$, $4\cos\left(\frac{\pi}{2}-2p\right)=4$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2p\right)=1$ $\therefore \sin2p=1$

$0<p<\pi$에서 $0<2p<2\pi$이므로

$2p=\frac{\pi}{2}$ $\therefore p=\frac{\pi}{4}$

$\therefore pq=\frac{\pi}{4}\times2=\frac{\pi}{2}$ 답 ①

04 그래프에서 함수 $y=a\sin bx+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$|a|+c=3$, $-|a|+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $|a|=2$, $c=1$

$\therefore a=2$, $c=1$ ($\because a>0$)

또 함수 $y=2\sin bx+1$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$, $|b|=2$ $\therefore b=2$ ($\because b>0$)

따라서 함수 $y=-c\cos2bx+a=-\cos4x+2$의 주기는

$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore p=\frac{\pi}{2}$

최댓값은 $|-1|+2=3$ $\therefore M=3$

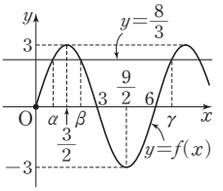
최솟값은 $-|-1|+2=1$ $\therefore m=1$

$\therefore Mmp=3\times1\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$ 답 ④

05 함수 $f(x)=3\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 점 $\left(\alpha, \frac{8}{3}\right)$, $\left(\beta, \frac{8}{3}\right)$은 위의 그림과 같이 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$ $\therefore \alpha+\beta=3$

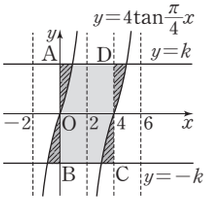
$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma-3)+f\left(\alpha+\beta+\frac{3}{2}\right)$

$=f(3+\gamma-3)+f\left(3+\frac{3}{2}\right)$

$=f(\gamma)+f\left(\frac{9}{2}\right)$

$=\frac{8}{3}+(-3)=-\frac{1}{3}$ 답 ②

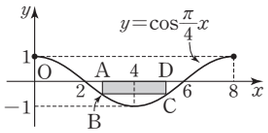
06 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 모두 같으므로 함수 $y=4\tan\frac{\pi}{4}x$ $(-2<x<6)$의 그래프와 두 직선 $y=k$, $y=-k$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



이때 $\overline{AB}=2k$, $\overline{AD}=4$이고, 직사각형 ABCD의 넓이가 18이므로

$2k\times4=18$ $\therefore k=\frac{9}{4}$ 답 ③

07 $\overline{AD}=\frac{8}{3}$이므로 점 A의 x좌표를 α라 하면 점 D의 x좌표는 $\alpha+\frac{8}{3}$이다.



두 점 A, D는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\left(\alpha+\frac{8}{3}\right)}{2}=4$, $2\alpha+\frac{8}{3}=8$, $2\alpha=\frac{16}{3}$ $\therefore \alpha=\frac{8}{3}$

이때 점 B의 y좌표는

$y=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times\frac{8}{3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{AD}\times\overline{AB}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$ 답 ③

08 그래프에서 함수 $y=a\cos bx+c$의 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로 $|a|+c=6$, $-|a|+c=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $|a|=4$, $c=2$

$\therefore a=4$, $c=2$ $(\because a>0)$

함수 $y=4\cos bx+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이므로

$\overline{AB}=\frac{2\pi}{b}$

함수 $y=4\cos bx+2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$0=4\cos bx+2$에서

$4\cos bx=-2$, $\cos bx=-\frac{1}{2}$

이때 $0\le x\le\frac{2\pi}{b}$에서 $0\le bx\le2\pi$이므로

$bx=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $bx=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{2\pi}{3b}$ 또는 $x=\frac{4\pi}{3b}$

$\therefore \overline{CD}=\frac{4\pi}{3b}-\frac{2\pi}{3b}=\frac{2\pi}{3b}$

따라서 사다리꼴 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{CD}+\overline{AB})\times6=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{3b}+\frac{2\pi}{b}\right)\times6=\frac{8\pi}{b}$

이므로 $\frac{8\pi}{b}=12\pi$ $\therefore b=\frac{2}{3}$

$\therefore b(a+c)=\frac{2}{3}\times(4+2)=4$ 답 ③

09 조건 (가)에서

$f\left(\frac{13}{6}\pi\right)=f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$ ($\because$ 조건 (나))

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 답 ②

10 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

$\therefore \cos(\pi+\theta)-\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta-\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)$

$=-\cos\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

$=-\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

$=-\frac{3}{20}$ 답 ②

11 $10\theta=\frac{\pi}{2}$, $5\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos9\theta=\cos(10\theta-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$,

$\cos8\theta=\cos(10\theta-2\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\sin2\theta$,

$\cos7\theta=\cos(10\theta-3\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\sin3\theta$,

$\cos6\theta=\cos(10\theta-4\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\theta\right)=\sin4\theta$

$\therefore \cos^2\theta+\cos^22\theta+\cos^23\theta+\cdots+\cos^29\theta$

$=(\cos^2\theta+\cos^29\theta)+(\cos^22\theta+\cos^28\theta)$

$+(\cos^23\theta+\cos^27\theta)+(\cos^24\theta+\cos^26\theta)+\cos^25\theta$

$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\cos^22\theta+\sin^22\theta)$

$+(\cos^23\theta+\sin^23\theta)+(\cos^24\theta+\sin^24\theta)+\cos^2\frac{\pi}{4}$

$=1+1+1+1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ 답 ②

12 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

이때 $\overline{BQ}=x$라 하면 직각삼각형 PBQ에서

$\overline{PQ}=\overline{BQ}\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}x$

이므로 $\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{PQ}=\sqrt{3}x$

$\therefore \overline{BR}=\overline{BQ}+\overline{QR}=x+\sqrt{3}x=(1+\sqrt{3})x$

직각삼각형 BRS에서

$$\tan\theta=\frac{\overline{RS}}{\overline{BR}}=\frac{\sqrt{3}x}{(1+\sqrt{3})x}=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

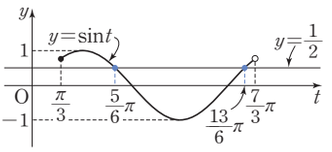
13 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1=0$에서

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \quad \therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

즉 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고 $\sin t=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 $\sin t=\frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값은 다음 그림과 같다.



$t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$

즉 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\pi$

답 ⑤

14 $4\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+k$에서

$4\cos x=\cos x+k \quad \therefore 3\cos x=k$

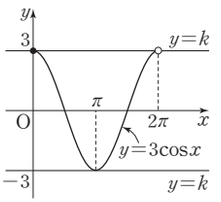
이 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 함수 $y=3\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=3\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$k=-3$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

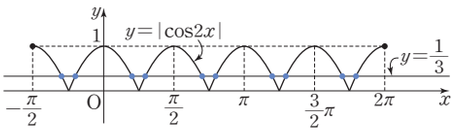
$-3\times3=-9$



답 ①

15 방정식 $|\cos2x|=\frac{1}{3}$의 실근은 함수 $y=|\cos2x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=|\cos2x|$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $-\frac{\pi}{2}\le x\le2\pi$에서 함수 $y=|\cos2x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$은 다음 그림과 같다.



따라서 $-\frac{\pi}{2}\le x\le2\pi$일 때, 함수 $y=|\cos2x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$의 교점의 개수가 10이므로 $-\frac{\pi}{2}\le x\le2\pi$에서 방정식 $|\cos2x|=\frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수는 10이다.

답 ④

16 $\sqrt{3}\sin^2x-(1-\sqrt{3})\sin x\cos x-\cos^2x=0$에서

$(\sqrt{3}\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=0$

$\therefore \sqrt{3}\sin x=\cos x$ 또는 $\sin x=-\cos x$ …… ㉠

이때 $\cos x=0$이면 $\sin x=\pm1$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

즉 $\cos x\ne0$이므로 ㉠에서

$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\frac{\sin x}{\cos x}=-1$

$\therefore \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\tan x=-1$

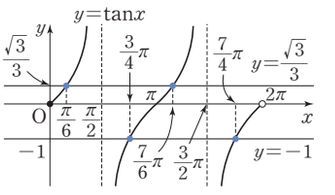
$0\le x<2\pi$일 때

(i) $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

(ii) $\tan x=-1$에서

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$



(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

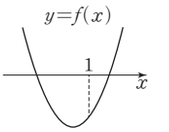
$\frac{\pi}{6}+\frac{7}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{23}{6}\pi$

답 ④

17 $f(x)=2x^2-\sqrt{2}x\sin2\theta-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근 사이에 1이 있어야 하므로 $f(1)<0$이어야 한다. 즉

$2-\sqrt{2}\sin2\theta-1<0$, $-\sqrt{2}\sin2\theta<-1$

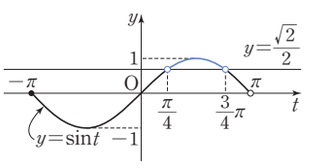
$\therefore \sin2\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}$



이때 $2\theta=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $-\pi\le t<\pi$이고

$\sin t>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\pi\le t<\pi$에서 $\sin t>\frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 t의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$\frac{\pi}{4}<t<\frac{3}{4}\pi$이므로

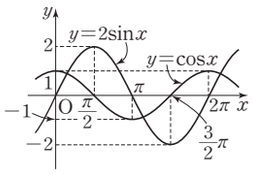
$\frac{\pi}{4}<2\theta<\frac{3}{4}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{8}<\theta<\frac{3}{8}\pi$

답 ④

18 ㄱ. $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$에서 $\cos x>0$, $\tan x<0$이므로

$\cos x>\tan x$ (참)

ㄴ. 두 함수 $y=2\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

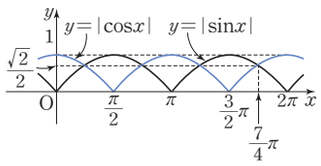


$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$일 때

$\cos x>2\sin x$

즉 $2^{\cos x}>2^{2\sin x}$이므로 $2^{\cos x}>4^{\sin x}$ (참)

ㄷ. 두 함수 $y=|\sin x|$, $y=|\cos x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$일 때

$|\sin x|>|\cos x|$이므로 $\log_4|\sin x|>\log_4|\cos x|$

$\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$일 때 $|\cos x|>|\sin x|$이므로

$\log_4|\cos x|>\log_4|\sin x|$ (거짓)

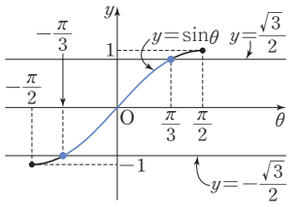
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

19 부등식 $x^2+2x\sin\theta+\frac{3}{4}\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2+2x\sin\theta+\frac{3}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\sin^2\theta-\frac{3}{4}\leq 0$, $\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\leq 0$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\sin\theta\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$일 때, 부등식 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\sin\theta\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서



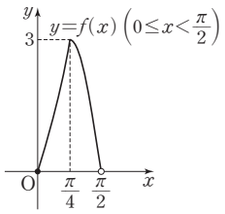
$-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$ 답 ③

20 조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$이고 조건 (나)에서 $0\leq x<\frac{\pi}{4}$일 때 $f(x)=a\tan x$이므로

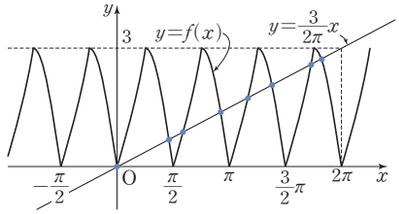
$a\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$ $\therefore a=3$ …… ❶

$\therefore f(x)=\begin{cases}3\tan x & \left(0\leq x<\frac{\pi}{4}\right)\\ 3\sin 2x & \left(\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

$0\leq x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 조건 (가)에서 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



이때 직선 $y=\frac{3}{2\pi}x$는 두 점 $(0, 0)$, $(2\pi, 3)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{2\pi}x$는 다음 그림과 같다.



…… ❷

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{2\pi}x$의 교점의 개수는 8이다. …… ❸

답 8

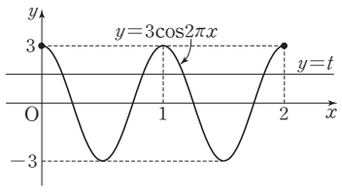
채점기준	배점
❶ a의 값 구하기	2
❷ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{2\pi}x$ 그리기	3
❸ 교점의 개수 구하기	1

참고 주기가 $\frac{\pi}{2}n$ (n은 자연수)인 함수는 모두 조건 (가)를 만족시키므로 조건 (가)만으로는 함수 $f(x)$의 주기를 알 수 없다.

21 $3\cos 2\pi x-t=0$에서 $3\cos 2\pi x=t$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=3\cos 2\pi x$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다. …… ❶

함수 $y=3\cos 2\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$이고, 최댓값은 3, 최솟값은 -3이므로 $0\leq x\leq 2$에서 함수 $y=3\cos 2\pi x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



…… ❷

(i) $t<-3$ 또는 $t>3$일 때

교점의 개수는 0이므로 $f(t)=0$

(ii) $t=-3$일 때, 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

(iii) $-3<t<3$일 때, 교점의 개수는 4이므로 $f(t)=4$

(iv) $t=3$일 때, 교점의 개수는 3이므로 $f(t)=3$ …… ❸

따라서 $X=\{0, 2, 3, 4\}$이므로 집합 X의 모든 원소의 합은

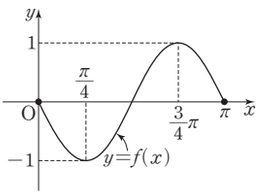
$0+2+3+4=9$ …… ❹

답 9

채점기준	배점
❶ 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 $y=3\cos 2\pi x$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같음을 설명하기	1
❷ 함수 $y=3\cos 2\pi x$의 그래프 그리기	2
❸ t의 값의 범위에 따라 $f(t)$의 값 구하기	2
❹ 집합 X의 모든 원소의 합 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제 p.30~34

1 함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $0\le x\le\pi$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 최댓값 1, $x=\frac{\pi}{4}$에서 최솟값 -1을 가지므로

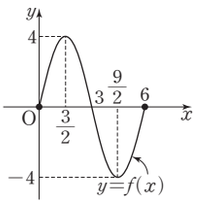
$a=\frac{3}{4}\pi$, $b=\frac{\pi}{4}$

따라서 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, 즉 $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi}=\frac{4}{\pi}$ 답 ④

참고 집합 $\{x|a\le x\le b\}$를 기호로 $[a, b]$와 같이 나타내고, 닫힌구간이라 한다.

2 함수 $f(x)=4\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이고, 최댓값은 4, 최솟값은 -4이므로 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



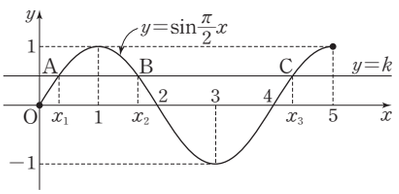
따라서 $0\le x\le 6$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최댓값 4, $x=\frac{9}{2}$에서 최솟값 -4를 가지므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$

따라서 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, $\left(\frac{9}{2}, -4\right)$ 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{73}$ 답 ④

3 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $0\le x\le 5$에서 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하면 두 점 A, B가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=1$, $x_1+x_2=2$

$\therefore x_2=2-x_1$

또 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로

$x_3=x_1+4$

이때 $x_1+x_2+x_3=\frac{25}{4}$이므로

$x_1+(2-x_1)+(x_1+4)=\frac{25}{4}$

$\therefore x_1=\frac{1}{4}$

따라서 $x_2=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$이므로

$\overline{AB}=x_2-x_1=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ 답 ③

다른풀이 두 점 B, C가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_2+x_3}{2}=3$ $\therefore x_2+x_3=6$

이때 $x_1+x_2+x_3=\frac{25}{4}$이므로

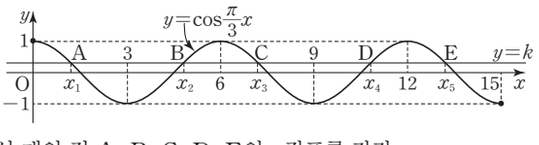
$x_1+6=\frac{25}{4}$ $\therefore x_1=\frac{1}{4}$

두 점 A, B가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\frac{1}{4}+x_2}{2}=1$ $\therefore x_2=\frac{7}{4}$

$\therefore \overline{AB}=x_2-x_1=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

4 함수 $y=\cos\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로 $0\le x\le 15$에서 $y=\cos\frac{\pi}{3}x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



다섯 개의 점 A, B, C, D, E의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 하면 두 점 A, B가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=3$, $x_1+x_2=6$

$\therefore x_2=6-x_1$

또 함수 $y=\cos\frac{\pi}{3}x$의 주기가 6이므로

$x_3=x_1+6$

$x_4=x_2+6=(6-x_1)+6=12-x_1$

$x_5=x_1+6+6=x_1+12$

이때 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{149}{4}$이므로

$x_1+(6-x_1)+(x_1+6)+(12-x_1)+(x_1+12)=\frac{149}{4}$

$\therefore x_1=\frac{5}{4}$

따라서 $x_2=6-\frac{5}{4}=\frac{19}{4}$이므로

$\overline{CD}=\overline{AB}=x_2-x_1=\frac{19}{4}-\frac{5}{4}=\frac{7}{2}$ 답 ④

다른풀이 $x_3=\frac{5}{4}+6=\frac{29}{4}$, $x_4=12-\frac{5}{4}=\frac{43}{4}$이므로

$\overline{CD}=x_4-x_3=\frac{43}{4}-\frac{29}{4}=\frac{7}{2}$

5 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times5=\frac{15}{2}$

$\therefore \overline{AB}=3$

$\therefore \overline{BC}=\overline{AB}+6=3+6=9$

이때 함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$ ($\because b>0$)이므로

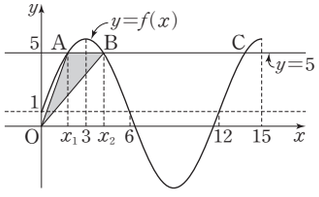
$\overline{AC}=2b$

$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=3+9=12$이므로

$2b=12$

$\therefore b=6$

$\therefore f(x)=a\sin\frac{\pi}{6}x+1$ $(0\le x\le15)$



함수 $f(x)$의 주기는 12이므로 위의 그림과 같이 두 점 A, B는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, $\overline{AB}=3$이므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$\frac{x_1+x_2}{2}=3$, $x_2-x_1=3$

$\therefore x_1+x_2=6$, $x_2-x_1=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{9}{2}$

따라서 $A\left(\frac{3}{2}, 5\right)$이고, 점 A는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

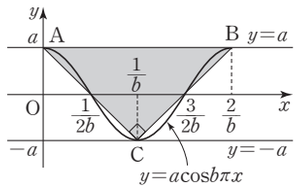
$f\left(\frac{3}{2}\right)=a\sin\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{3}{2}\right)+1=5$

$a\sin\frac{\pi}{4}=4$, $\frac{\sqrt{2}}{2}a=4$

$\therefore a=4\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=(4\sqrt{2})^2+6^2=68$ 답 ①

6 함수 $y=a\cos b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이므로 함수 $y=a\cos b\pi x$ $\left(0\le x\le\frac{2}{b}\right)$는 다음 그림과 같이 $x=0$, $x=\frac{2}{b}$에서 최댓값 a, $x=\frac{1}{b}$에서 최솟값 $-a$를 갖는다.



$\therefore A(0, a)$, $B\left(\frac{2}{b}, a\right)$, $C\left(\frac{1}{b}, -a\right)$

이때 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$이므로

$\frac{-a-a}{\frac{1}{b}-0}\times\frac{-a-a}{\frac{1}{b}-\frac{2}{b}}=-1$

$-2ab\times2ab=-1$

$a^2=\frac{1}{4b^2}$ $\therefore a=\frac{1}{2b}$ ($\because a>0$, $b>0$) …… ㉠

직각삼각형 ACB의 넓이가 100이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{b}\times\{a-(-a)\}=100$

$\frac{2a}{b}=100$ $\therefore a=50b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=\frac{1}{10}$ ($\because a>0$, $b>0$)

$\therefore a+b=5+\frac{1}{10}=\frac{51}{10}$ 답 ①

7 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$에서 $-\sin\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{3}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 답 ②

8 $\cos(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

$-\cos\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-2\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}$

$=-\frac{\sqrt{14}}{4}$

$\therefore -\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{14}}{4}}$

$=\frac{\sqrt{7}}{7}$ 답 ④

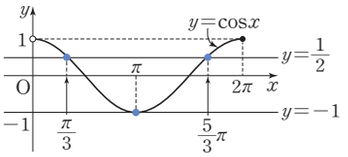
9 $\sin^2x=\cos^2x+\cos x$에서

$1-\cos^2x=\cos^2x+\cos x$

$2\cos^2x+\cos x-1=0$

$(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$



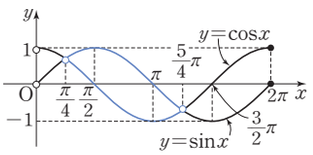
$0<x\le2\pi$일 때, 함수 $y=\cos x$의 그래프는 위의 그림과 같으므로

(i) $\cos x=-1$에서 $x=\pi$

(ii) $\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $0<x\le2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2x=\cos^2x+\cos x$의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ····· ㉠



한편 $0<x\le2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 부등식 $\sin x>\cos x$의 해는

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi$ 답 ①

10 $8\sin^2x+2\cos x-5=0$에서

$8(1-\cos^2x)+2\cos x-5=0$

$8-8\cos^2x+2\cos x-5=0$

$8\cos^2x-2\cos x-3=0$

$(2\cos x+1)(4\cos x-3)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{3}{4}$ ····· ㉠

한편 $\cos x<\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)$에서

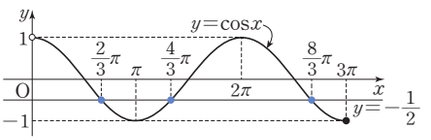
$\cos x<-\cos x$

$2\cos x<0$

$\therefore \cos x<0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키려면

$\cos x=-\frac{1}{2}$



$0<x\le3\pi$일 때, 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 위의 그림과 같으므로

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{8}{3}\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{14}{3}\pi$ 답 ③

3 사인법칙과 코사인법칙

교과서 예제 p.37

01 (1) 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}=2R$이므로

$R=\frac{\sqrt{6}}{2\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$

$b=\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

(2) $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{9}{\sin 60^\circ}=2R$이므로

$R=\frac{9}{2\sin 60^\circ}=\frac{9}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\sqrt{3}$

$a=\frac{9}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{6}$

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=2R$이므로

$R=\frac{\sqrt{2}}{2\sin 135^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2\sin(180^\circ-45^\circ)}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$

$B=135^\circ$가 둔각이므로 A는 예각이다.

$\sin A=\frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$\therefore A=30^\circ$

(4) 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}=2R$이므로

$R=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin(180^\circ-60^\circ)}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$

$A=120^\circ$가 둔각이므로 C는 예각이다.

$\sin C=\frac{\sqrt{2}\sin 120^\circ}{\sqrt{3}}=\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}}\times\sqrt{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore C=45^\circ$

$\therefore B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

답 (1) $R=\sqrt{3}$, $b=3$ (2) $R=3\sqrt{3}$, $a=3\sqrt{6}$
(3) $R=1$, $A=30^\circ$ (4) $R=1$, $B=15^\circ$

02 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=1:3:5$이므로

$a=k$, $b=3k$, $c=5k(k>0)$라 하면

$(a+b):(b+c):(c+a)=(k+3k):(3k+5k):(5k+k)$

$=4k:8k:6k=2:4:3$

답 2 : 4 : 3

03 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$에서

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$, $\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}=\frac{c^2}{4R^2}$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $C=90^\circ$인 직각삼각형

04 (1) 코사인법칙에 의하여

$a^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos 60^\circ$

$=36+16-2\times6\times4\times\frac{1}{2}$

$=28$

$\therefore a=2\sqrt{7}$ ($\because a>0$)

(2) 코사인법칙에 의하여

$b^2=(\sqrt{3})^2+2^2-2\times\sqrt{3}\times2\times\cos 30^\circ$

$=3+4-2\times\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=1$

$\therefore b=1$ ($\because b>0$)

(3) 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$

$\therefore A=60^\circ$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

(4) 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times3\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore B=45^\circ$ ($\because 0^\circ<B<180^\circ$)

답 (1) $2\sqrt{7}$ (2) 1 (3) 60° (4) 45°

05 (1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{3}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin 150^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin(180^\circ-30^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times3\times\frac{1}{2}=3$

답 (1) 12 (2) 3

06 (1) 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\times8\times9}=\frac{2}{3}$

(2) $0^\circ<A<180^\circ$에서 $\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 8\times 9\times\frac{\sqrt{5}}{3}=12\sqrt{5}$

(4) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{a}{\sin A}=2R$이므로

$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{7}{2\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (3) $12\sqrt{5}$ (4) $\frac{21\sqrt{5}}{10}$

참고 (3) $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+8+9}{2}=12$라 하면 헤론의 공식에 의하여

$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{12\times(12-7)\times(12-8)\times(12-9)}=12\sqrt{5}$

07 (1) $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ=2\times 3\times\frac{1}{2}=3$

(2) $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin 120^\circ$

$=7\times 8\times\sin(180^\circ-60^\circ)$

$=7\times 8\times\sin 60^\circ$

$=7\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=28\sqrt{3}$ 답 (1) 3 (2) $28\sqrt{3}$

08 $\square ABCD=\frac{1}{2}\times 10\times 16\times\sin 135^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 16\times\sin(180^\circ-45^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 16\times\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 16\times\frac{\sqrt{2}}{2}=40\sqrt{2}$ 답 $40\sqrt{2}$

기출 Best | 1회 p.38~40

01 삼각형 ABC에서

$C=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=\frac{8}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{8}{\sin 45^\circ}\times\sin 30^\circ=\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{2}$ 답 ④

02 사인법칙에 의하여

$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}=2R$이므로

$R=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2}=4$

$b=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

$\therefore bR=4\sqrt{2}\times 4=16\sqrt{2}$ 답 ②

03 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

이므로

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$ab:bc:ca=3:4:6$에서 $\frac{ab}{3}=\frac{bc}{4}=\frac{ca}{6}$

$\frac{ab}{3}=\frac{bc}{4}$에서 $\frac{a}{3}=\frac{c}{4}$ $\therefore c=\frac{4}{3}a$

$\frac{bc}{4}=\frac{ca}{6}$에서 $\frac{b}{4}=\frac{a}{6}$ $\therefore b=\frac{2}{3}a$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=a:\frac{2}{3}a:\frac{4}{3}a$

$=3:2:4$ 답 ②

04 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$a\sin B\sin C=c\sin A$에서 사인법칙에 의하여

$a\times\sin B\times\frac{c}{2R}=c\times\frac{a}{2R}$

$\therefore \sin B=1$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다. 답 ②

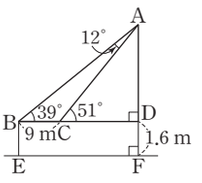
05 오른쪽 그림에서

$\angle BAC=51^\circ-39^\circ=12^\circ$,

$\overline{BC}=9$ m

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{9}{\sin 12^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 39^\circ}$



$\therefore \overline{AC}=\frac{9}{\sin 12^\circ}\times\sin 39^\circ=\frac{9}{0.21}\times 0.63=27(\text{m})$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\overline{AC}\sin 51^\circ=27\times 0.78=21.06(\text{m})$

$\therefore \overline{AF}=21.06+1.6=22.66(\text{m})$

따라서 지면으로부터 애드벌룬의 높이는 22.66 m이다. 답 ⑤

06 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=180^\circ$

$\therefore A=180^\circ-C=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=5^2+8^2-2\times 5\times 8\times\cos 60^\circ$

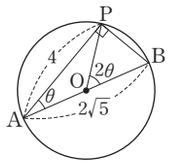
$=5^2+8^2-2\times 5\times 8\times\frac{1}{2}=49$

$\therefore \overline{BD}=7$ 답 ①

참고 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 항상 180°이다.

즉 $A+C=180^\circ$, $B+D=180^\circ$이다.

07 원의 중심을 O라 할 때, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$를 그으면



$\angle POB=2\theta$

삼각형 ABP는 $\angle P=90^\circ$인 직각삼각형이므로

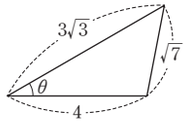
$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$

삼각형 POB에서 $\overline{OP}=\overline{OB}=\sqrt{5}$ (원의 반지름의 길이)이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos 2\theta=\dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$

답 ③

08 $\sqrt{7}<4<3\sqrt{3}$이고, 삼각형에서 가장 짧은 변의 대각의 크기가 가장 작으므로 그 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여



$\cos\theta=\dfrac{4^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{2\times4\times3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta=30^\circ\ (\because\ 0^\circ<\theta<180^\circ)$

답 ①

09 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{14^2+13^2-15^2}{2\times14\times13}=\dfrac{5}{13}$

이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

$(\because\ 0^\circ<A<180^\circ$일 때 $\sin A>0)$

이때 사인법칙에 의하여 $\dfrac{15}{\sin A}=2R$이므로

$8R=\dfrac{60}{\sin A}=\dfrac{60}{\frac{12}{13}}=65$

답 ②

10 $a\cos B=b\cos A$에서 코사인법칙에 의하여

$a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$a^2+c^2-b^2=b^2+c^2-a^2,\ 2a^2=2b^2$

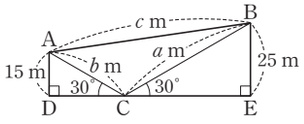
$a^2-b^2=0,\ (a+b)(a-b)=0$

$\therefore\ a=b\ (\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

11 삼각형 ADC에서



$b=\dfrac{15}{\sin 30^\circ}=30$

삼각형 BEC에서

$a=\dfrac{25}{\sin 30^\circ}=50$

삼각형 ACB에서 $\angle ACB=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$이므로

$c^2=50^2+30^2-2\times50\times30\times\cos 120^\circ=4900$

$\therefore\ c=70\ (\because\ c>0)$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 70 m이다.

답 ⑤

12 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

$\dfrac{1}{2}\times3\times5=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{AD}\times\sin 45^\circ+\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\times\sin 45^\circ$

$\dfrac{15}{2}=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{AD}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$15=4\sqrt{2}\,\overline{AD}\qquad\therefore\ \overline{AD}=\dfrac{15\sqrt{2}}{8}$

답 ③

13 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=4:3:5$이므로 원의 중심을 O라 하면

$\angle AOB=360^\circ\times\dfrac{4}{4+3+5}=120^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\times\dfrac{3}{4+3+5}=90^\circ$

$\angle COA=360^\circ\times\dfrac{5}{4+3+5}=150^\circ$

$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin 120^\circ+\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin 90^\circ$

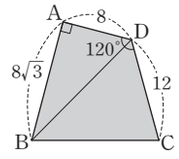
$+\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin 150^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times2\times2\times1+\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{1}{2}$

$=3+\sqrt{3}$

답 ④

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 직각삼각형 ABD에서



$\overline{BD}=\sqrt{8^2+(8\sqrt{3})^2}=16$

$\angle ADB=\alpha$라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}$

$\alpha=60^\circ$이므로 $\angle BDC=120^\circ-60^\circ=60^\circ$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\dfrac{1}{2}\times8\times8\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\times16\times12\times\sin 60^\circ$

$=32\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\times16\times12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=80\sqrt{3}$

답 ④

15 평행사변형 ABCD의 넓이가 $14\sqrt{3}$이므로

$4\times7\times\sin B=14\sqrt{3}\qquad\therefore\ \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ B=60^\circ\left(\because\ 0<B<\dfrac{\pi}{2}\right)$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+7^2-2\times4\times7\times\cos 60^\circ$

$=16+49-2\times4\times7\times\dfrac{1}{2}$

$=37$

$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{37}$

답 ②

16 $0^\circ<\theta<90^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2}$

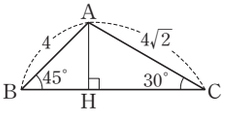
$=\frac{5}{7}$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times 6\times 7\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 7\times\frac{5}{7}=15$ 답 ④

기출 Best | 2회 p.41~43

01 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 45^\circ=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AC}\cos 30^\circ=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

$\angle BAC=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sin 105^\circ}=\frac{4}{\sin 30^\circ}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

$\therefore \sin 105^\circ=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{8}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 답 ④

02 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}=2R$

$\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$ $\therefore 2\sqrt{2}=\sqrt{2}c=2R$

따라서 $R=\sqrt{2}$, $c=2$이므로

$cR=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 답 ②

03 $\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{3}=\frac{c+a}{5}=k(k>0)$라 하면

$a+b=4k$ …… ㉠

$b+c=3k$ …… ㉡

$c+a=5k$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+b+c)=12k$

$\therefore a+b+c=6k$ …… ㉣

㉣−㉡, ㉣−㉢, ㉣−㉠을 각각 하면

$a=3k$, $b=k$, $c=2k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=3k:k:2k$

$=3:1:2$ 답 ⑤

04 $A+B+C=\pi$이므로

$a\sin(B+C)+b\sin(C+A)=c\sin(A+B)$에서

$a\sin(\pi-A)+b\sin(\pi-B)=c\sin(\pi-C)$

$a\sin A+b\sin B=c\sin C$

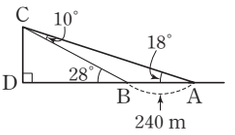
이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$a\times\frac{a}{2R}+b\times\frac{b}{2R}=c\times\frac{c}{2R}$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다. 답 ②

05 오른쪽 그림에서



$\angle ACB=28^\circ-18^\circ=10^\circ$,

$\overline{BA}=240$ m

삼각형 CBA에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin 18^\circ}=\frac{240}{\sin 10^\circ}$

$\therefore \overline{BC}=\frac{240}{\sin 10^\circ}\times\sin 18^\circ=\frac{240}{0.2}\times 0.3=360(\text{m})$

직각삼각형 CDB에서

$\overline{CD}=\overline{BC}\sin 28^\circ=360\times 0.5=180(\text{m})$

따라서 지면에서 C지점까지의 높이는 180 m이다. 답 ③

06 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=\pi$

$\therefore A=\pi-C$

$\cos A=\cos(\pi-C)=-\cos C=-\frac{7}{20}$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

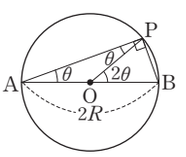
$\overline{BD}^2=2^2+5^2-2\times 2\times 5\times\cos A$

$=2^2+5^2-2\times 2\times 5\times\left(-\frac{7}{20}\right)$

$=36$

$\therefore \overline{BD}=6$ 답 ①

07 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 할 때, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$, $\overline{BP}$를 그으면 직각삼각형 PAB에서



$\overline{BP}=\overline{AB}\sin\theta=2R\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}R$

따라서 삼각형 OBP에서 코사인법칙에 의하여

$\cos 2\theta=\frac{R^2+R^2-\left(\frac{2}{3}R\right)^2}{2\times R\times R}=\frac{7}{9}$ 답 ④

08 삼각형에서 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 그 각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{19})^2}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=120^\circ\ (\because\ 0^\circ<\theta<180^\circ)$ 답 ③

참고 $\cos120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos60^\circ=-\dfrac{1}{2}$

09 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\dfrac{45}{60}=\dfrac{3}{4}$

이고 $0<A<\pi$에서 $\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\dfrac{4}{\sin A}=2R$이므로

$R=\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$ 답 ④

10 $\tan A\sin A=\tan C\sin C$에서

$\dfrac{\sin A}{\cos A}\times\sin A=\dfrac{\sin C}{\cos C}\times\sin C$

$\therefore\ \cos C\sin^2A=\cos A\sin^2C$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\times\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

$a(a^2+b^2-c^2)=c(b^2+c^2-a^2)$

$a^3+ab^2-ac^2=b^2c+c^3-a^2c$

$a^3-c^3+ab^2-b^2c-ac^2+a^2c=0$

$(a-c)(a^2+ac+c^2)+(a-c)b^2+(a-c)ac=0$

$(a-c)(a^2+ac+c^2+b^2+ac)=0$

$(a-c)\{(a+c)^2+b^2\}=0$

$\therefore\ a=c\ (\because\ (a+c)^2+b^2>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

11 $\overline{CD}=x$ m로 놓으면

$\overline{AC}=\sqrt{3}x$ m, $\overline{BC}=x$ m

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$81^2=x^2+(\sqrt{3}x)^2-2\times x\times\sqrt{3}x\times\cos30^\circ$

$81^2=4x^2-2\sqrt{3}x^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2=81^2\qquad\therefore\ x=81\ (\because\ x>0)$

따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 81 m이다. 답 ⑤

12 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

$\dfrac{1}{2}\times15\times10\times\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{1}{2}\times15\times\overline{AD}\times\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\times10\times\overline{AD}\times\sin\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{1}{2}\times15\times10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times15\times\overline{AD}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times10\times\overline{AD}\times\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{75\sqrt{3}}{2}=\dfrac{25}{4}\overline{AD}\qquad\therefore\ \overline{AD}=6\sqrt{3}$ 답 ①

13 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:3:2$이므로 원의 중심을 O라 하면

$\angle AOB=360^\circ\times\dfrac{3}{3+3+2}=135^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\times\dfrac{3}{3+3+2}=135^\circ$

$\angle COA=360^\circ\times\dfrac{2}{3+3+2}=90^\circ$

$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$이므로

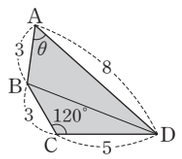
$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\sin135^\circ+\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\sin135^\circ$

$+\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\sin90^\circ$

$=9\sqrt{2}+9\sqrt{2}+18$

$=18+18\sqrt{2}$ 답 ⑤

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{BD}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ$

$=9+25-2\times3\times5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=49$

$\therefore\ \overline{BD}=7$

$\angle BAD=\theta$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=60^\circ\ (\because\ 0^\circ<\theta<180^\circ)$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times8\times\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}+\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$ 답 ①

15 사각형 ABCD가 평행사변형이므로

$A+B=\pi\qquad\therefore\ B=\pi-A=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{4}\pi$

$\overline{BC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{29})^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-2\times2\sqrt{2}\times x\times\cos\dfrac{3}{4}\pi$

$29=8+x^2-4\sqrt{2}x\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x^2+4x-21=0,\ (x-3)(x+7)=0$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=2\sqrt{2}\times3\times\sin\frac{3}{4}\pi$

$=2\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$ 답 ②

16 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 120°인 사각형의 넓이가 $5\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}ab\sin120^\circ=5\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}ab\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=5\sqrt{3}$ $\therefore ab=20$

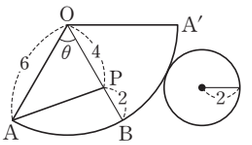
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=9^2-2\times20=81-40=41$ 답 ③

변형유형 집중공략

p.44~45

1-1 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 실의 길이는 $\overline{AP}$의 길이이다.



밑면인 원의 반지름의 길이가 2이므로 밑면인 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times2=4\pi$

즉 $\overset{\frown}{AA'}=4\pi$이므로

$\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AA'}=\frac{1}{2}\times4\pi=2\pi$

즉 부채꼴 AOB의 호의 길이가 2π이므로 $\angle AOB=\theta$라 하면

$2\pi=6\theta$

$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

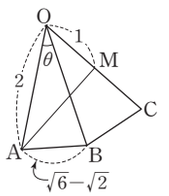
$\overline{AP}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=36+16-2\times6\times4\times\frac{1}{2}=28$

$\therefore\overline{AP}=2\sqrt{7}$

따라서 감은 실의 길이는 $2\sqrt{7}$이다. 답 ③

1-2 두 삼각형 OAB와 OBC를 펼쳐서 평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고 구하는 최단 거리는 $\overline{AM}$의 길이와 같다.



삼각형 OAB에서 $\angle AOB=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{2\times2\times2}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉 $\angle AOB=30^\circ$이므로

$\angle AOM=2\angle AOB=2\times30^\circ=60^\circ$

따라서 삼각형 OAM에서 코사인법칙에 의하여

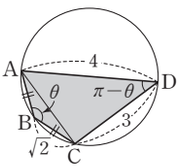
$\overline{AM}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos60^\circ$

$=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$

$\therefore\overline{AM}=\sqrt{3}$

따라서 구하는 최단 거리는 $\sqrt{3}$이다. 답 ②

2-1 오른쪽 그림과 같이 $\angle ABC=\theta$라 하면 $\angle ADC=\pi-\theta$이므로



두 삼각형 ABC, ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\theta$

$=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos(\pi-\theta)$

$4-4\cos\theta=25+24\cos\theta$

$-28\cos\theta=21$

$\therefore\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$0<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin(\pi-\theta)$

$=\sin\theta+6\sin\theta$

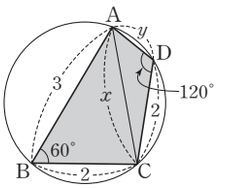
$=7\sin\theta=7\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{7\sqrt{7}}{4}$ 답 ④

2-2 $\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ$

$=9+4-2\times3\times2\times\frac{1}{2}=7$

$\therefore x=\sqrt{7}$



사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$D=180^\circ-B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\overline{AD}=y$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{7})^2=2^2+y^2-2\times2\times y\times\cos120^\circ$

$7=4+y^2+2y$, $y^2+2y-3=0$

$(y+3)(y-1)=0$

$\therefore y=1$ ($\because y>0$)

$\therefore\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ 답 ②

서술형 What & How

p.46~47

1 (1) 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{10})^2}{2\times3\times2}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ❶$$

(2) $0<C<\pi$, 즉 $\sin C>0$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \cdots\cdots ❷$$

(3) 삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AP}}{\sin C}=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}$이므로

$$\overline{AP}=\frac{2}{\sin 60^\circ}\times\sin C=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ❸$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (3) $\sqrt{5}$

2 $\overline{BC}=6$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{3^2+6^2-6^2}{2\times3\times6}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ❶$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos B$$

$$=9+16-2\times3\times4\times\frac{1}{4}=19 \quad \cdots\cdots ❷$$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{19}$

$\therefore m=19$ $\cdots\cdots ❸$

답 19

채점기준	배점
❶ $\cos B$의 값 구하기	2
❷ $\overline{AD}^2$의 값 구하기	2
❸ $\overline{AD}$의 길이와 m의 값 구하기	1

3 삼각형 PAC는 $\angle PAC=\angle CPA=45^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\overline{PC}=x(\text{km})$ $\cdots\cdots ❶$

직각삼각형 PBC에서

$$\overline{BC}=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x(\text{km}) \quad \cdots\cdots ❷$$

삼각형 BAC에서 $\angle BAC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{3}x)^2=20^2+x^2-2\times20\times x\times\cos 120^\circ$$

$$3x^2=400+x^2-40x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2x^2-20x-400=0,\ x^2-10x-200=0$$

$$(x+10)(x-20)=0$$

$\therefore x=20$ ($\because x>0$) $\cdots\cdots ❸$

답 20

4 삼각형 BCD는 $\angle CBD=\angle DCB=45^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\overline{CD}=x(\text{m})$ $\cdots\cdots ❶$

직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AD}=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x(\text{m}) \quad \cdots\cdots ❷$$

삼각형 ABD에서 $\angle ADB=30^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$$4^2=(\sqrt{3}x)^2+x^2-2\times\sqrt{3}x\times x\times\cos 30^\circ$$

$$16=3x^2+x^2-2\sqrt{3}x^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x^2=16$ $\therefore x=4$ ($\because x>0$) $\cdots\cdots ❸$

답 4

채점기준	배점
❶ $\overline{BD}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타내기	1
❷ $\overline{AD}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타내기	1
❸ 코사인법칙을 이용하여 x의 값 구하기	3

실전 문제 | 1회

p.48~51

01 반지름의 길이 $R=4$인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$$

$$=\frac{a+b+c}{2R}$$

$$=\frac{a+b+c}{2\times4}=\frac{3}{2}$$

$\therefore a+b+c=12$ 답 ②

02 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

따라서 조건 (나)에서

$$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R},\ a^2=b^2$$

$\therefore a=b$ ($\because a>0,\ b>0$)

조건 (다)에서

$$\frac{c^2}{4R^2}=\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}$$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$이고 $a=b$인 직각이등변삼각형이다. 이때 조건 (가)에서 $a=b=4$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$$ 답 ⑤

03 삼각형 ABC에서

$A+B+C=\pi$ $\therefore A+B=\pi-C$

따라서 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$이므로

$\sin(A+B)\sin C=\frac{4}{5}$에서 $\sin^2 C=\frac{4}{5}$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$c=2R\sin C=2\times5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$ 답 ②

04 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 4이므로

$\overline{BM}=\overline{DN}=2$

두 직각삼각형 ABM, AND에서

$\overline{AM}=\overline{AN}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{CM}=\overline{CN}=2$인 직각삼각형 CMN에서

$\overline{MN}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 AMN에서 코사인법칙에 의하여

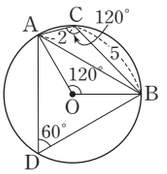
$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

$0<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \cos\theta+\sin\theta=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$ 답 ④

05 오른쪽 그림에서 원주각의 성질에 의하여



$\angle ADB=60^\circ$이므로 원에 내접하는 사각형 ADBC에서

$\angle ACB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos120^\circ$

$=4+25-20\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=39$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{39}$

이때 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin120^\circ}=2R\qquad\therefore\ R=\frac{\overline{AB}}{2\sin120^\circ}=\frac{\sqrt{39}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{13}$

따라서 원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times(\sqrt{13})^2=13\pi$ 답 ②

다른풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 OBA에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=r^2+r^2-2\times r\times r\times\cos120^\circ$

$=r^2+r^2-2\times r\times r\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3r^2$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos120^\circ$

$=4+25-2\times2\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=39$

즉 $3r^2=39$이므로 $r^2=13$

따라서 원의 넓이는 $\pi r^2=13\pi$

06 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=6:4=3:2$이므로

$\overline{CD}=5\times\frac{2}{3+2}=2$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\frac{1}{8}$

따라서 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos C$

$=16+4-2\times4\times2\times\frac{1}{8}=18$

$\therefore\ \overline{AD}=3\sqrt{2}$ 답 ①

07 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

ㄱ. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin120^\circ}=\frac{4}{\sin120^\circ}=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (참)

ㄴ. $\overline{CP}=1$일 때, 삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BP}^2=1^2+4^2-2\times1\times4\times\cos30^\circ=17-4\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. $\overline{CP}=x$라 하면 삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=(4^2+x^2-2\times4\times x\times\cos30^\circ)+x^2$

$=2x^2-4\sqrt{3}x+16$

$=2(x-\sqrt{3})^2+10\ \left(0<x<\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

즉 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $x=\sqrt{3}$에서 최솟값 10을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

참고 ㄷ. $\overline{AB}=\overline{AC}=y$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=y^2+y^2-2\times y\times y\times\cos120^\circ$

$16=2y^2-2y^2\times\left(-\frac{1}{2}\right),\ 3y^2=16$

$y^2=\frac{16}{3}\qquad\therefore\ y=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ (\because\ y>0)$

즉 $\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이므로

$0<\overline{CP}<\overline{AC}$에서 $0<x<\frac{4\sqrt{3}}{3}$

08 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이므로 $\sin A=2\sin B\cos C$에서

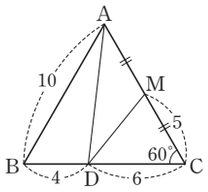
$\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2=a^2+b^2-c^2,\ b^2=c^2$

$\therefore\ b=c\ (\because\ b>0,\ c>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

09 $\overline{BD}:\overline{DC}=2:3$이므로



$\overline{DC}=10\times\frac{3}{2+3}=6$

$\overline{AM}=\overline{CM}$이므로

$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times10=5$

따라서 삼각형 DCM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DM}^2=6^2+5^2-2\times6\times5\times\cos60^\circ$

$=6^2+5^2-2\times6\times5\times\frac{1}{2}=31$

$\therefore\ \overline{DM}=\sqrt{31}$ 답 ④

10 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{21})^2=b^2+c^2-2bc\cos60^\circ$

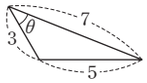
$21=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}$, $21=b^2+c^2-bc$

$(b+c)^2-3bc=21$ $\therefore\ 9^2-3bc=21$

$3bc=60$ $\therefore\ bc=20$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ 답 ②

11 길이가 5인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여



$\cos\theta=\frac{3^2+7^2-5^2}{2\times3\times7}=\frac{11}{14}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{5}{\sin\theta}=2R$ $\therefore\ R=\frac{5}{2\sin\theta}=\frac{5}{2\times\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$ 답 ④

12 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=3^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\times3\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$=3^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=9+27-27=9$

$\therefore\ \overline{AB}=3$

즉 삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ABD=\angle ADB=30^\circ$

$\therefore\ \angle A=180^\circ-2\times30^\circ=120^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ$

$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$\therefore\ \overline{BC}=7$ 답 ④

13 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 한 점 C에 대하여 $\angle C=90^\circ$이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{6^2-(\sqrt{11})^2}=\sqrt{25}=5$

점 D는 선분 BC를 1 : 4로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}\times\frac{1}{1+4}=5\times\frac{1}{1+4}=1$

$\overline{OB}$는 원의 반지름이므로

$\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times6=3$

이고, 직각삼각형 ABC에서

$\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{5}{6}$

따라서 삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OD}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos B$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{5}{6}=5$

$\therefore\ \overline{OD}=\sqrt{5}$ 답 ①

14 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ B=60^\circ$ ($\because\ 0<B<180^\circ$)

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$5\times8\times\sin60^\circ=5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 ②

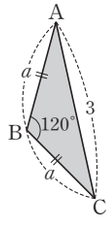
15 조건 (가)에서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{\frac{b}{2R}}{\frac{c}{2R}}=2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\frac{b}{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$

$b^2=b^2+c^2-a^2$, $a^2=c^2$

$\therefore\ a=c$ ($\because\ a>0$, $c>0$)

조건 (가), (나)에서 삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같으므로 코사인법칙에 의하여



$3^2=a^2+a^2-2\times a\times a\times\cos120^\circ$

$9=a^2+a^2-2\times a\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$9=a^2+a^2+a^2$, $9=3a^2$

$a^2=3$ $\therefore\ a=\sqrt{3}$ ($\because\ a>0$)

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 답 ①

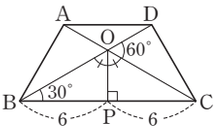
16 $\overline{BD}=\overline{AC}=6\sqrt{3}$이므로 $\angle DOC=\theta$라 하면

등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 $27\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times6\sqrt{3}\times\sin\theta=27\sqrt{3}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ \theta=60^\circ$ ($\because\ 0^\circ<\theta<180^\circ$)

따라서 $\angle BOC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P라 하면 직각삼각형 BPO에서



$\overline{BP}=6$, $\overline{OB}=4\sqrt{3}$

이때 $\overline{OC}=\overline{OB}=4\sqrt{3}$이므로

$\overline{OA}=\overline{AC}-\overline{OC}=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \triangle ABO=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ 답 ①

17 $\angle BAC=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{100}{\sin30^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin45^\circ}$

$\therefore\ \overline{AB}=\frac{100}{\sin30^\circ}\times\sin45^\circ=\frac{100}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=100\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $100\sqrt{2}$ m이다. 답 ⑤

18 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$

$\therefore\ \overline{AB}=\frac{\overline{BC}\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}\sin C}{\sin45^\circ}$

$=\frac{2\sqrt{2}\sin C}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sin C$

$\angle B+\angle C=180^\circ-45^\circ=135^\circ$이므로

$0^\circ<C<135^\circ$

이때 $0<\sin C\le1$이므로 $0<4\sin C\le4$

$\therefore\ 0<\overline{AB}\le4$

따라서 변 AB의 길이의 최댓값은 4이다. 답 ②

다른풀이 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하면

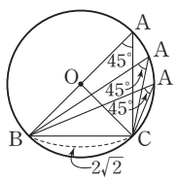
$\angle BOC=2\times45^\circ=90^\circ$

이고, 원의 반지름의 길이는

$\overline{OB}=\overline{OC}=2$

이때 $\overline{AB}$의 길이는 $\overline{AB}$가 원의 지름일 때 최대이므로 $\overline{AB}$의 길이의 최댓값은

$2\times2=4$이다.



19 삼각형 ABC는 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로 선분 AC는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다. 따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\overline{AC}=2R$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\overline{AC}\cos\frac{\pi}{6}=2R\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\overline{BC}=\overline{AC}\sin\frac{\pi}{6}=2R\times\frac{1}{2}=R$ …… ❶

또 선분 AC가 삼각형 ACD의 외접원의 지름이므로 $\angle D=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\overline{AC}\cos\frac{\pi}{4}=2R\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}R$

$\overline{CD}=\overline{AC}\sin\frac{\pi}{4}=2R\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}R$ …… ❷

따라서

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AB}\times\sin(\angle DAB)$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}R\times\sqrt{3}R\times\sin(\angle DAB)$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}R^2\sin(\angle DAB)$

$\triangle DBC=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{CB}\times\sin(\angle DCB)$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}R\times R\times\sin(\pi-\angle DAB)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}R^2\sin(\angle DAB)$ …… ❸

이므로

$\frac{\triangle ABD}{\triangle DBC}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}R^2\sin(\angle DAB)}{\frac{\sqrt{2}}{2}R^2\sin(\angle DAB)}$

$=\sqrt{3}$

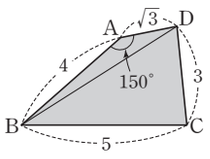
$\therefore\ \triangle ABD=\sqrt{3}\triangle DBC$

따라서 $m=\sqrt{3}$이므로 $m^2=3$ …… ❹

답 3

채점기준	배점
❶ 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R로 놓고 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$를 각각 R에 대한 식으로 나타내기	2
❷ $\overline{AD}$, $\overline{CD}$를 각각 R에 대한 식으로 나타내기	2
❸ 두 삼각형 ABD, DBC의 넓이를 각각 R에 대한 식으로 나타내기	2
❹ m^2의 값 구하기	1

20 오른쪽 그림에서



$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}\times\sin150^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$

$=\sqrt{3}$ …… ❶

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=4^2+(\sqrt{3})^2-2\times4\times\sqrt{3}\times\cos150^\circ$

$=4^2+(\sqrt{3})^2-2\times4\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=31$

$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{31}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{5^2+3^2-(\sqrt{31})^2}{2\times5\times3}=\frac{1}{10}$

$0<C<\pi$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{10}$

$\therefore \triangle BCD=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times \sin C$

$=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times \frac{3\sqrt{11}}{10}$

$=\frac{9\sqrt{11}}{4}$ …… ❷

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\sqrt{3}+\frac{9\sqrt{11}}{4}$ …… ❸

따라서 $p=3$, $m=4$, $n=9$이므로

$p+m+n=3+4+9=16$ …… ❹

답 16

채점기준	배점
❶ 삼각형 ABD의 넓이 구하기	2
❷ 삼각형 BCD의 넓이 구하기	4
❸ 사각형 ABCD의 넓이 구하기	1
❹ $p+m+n$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.52~55

01 호 AB에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle ADB=\angle ACB=45^\circ$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ}$, $\overline{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}\times \sin 60^\circ$

$\therefore \overline{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ 답 ③

02 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

따라서 조건 (가)에서

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}$, $a^2=b^2$

$\therefore a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

따라서 $\sin A=\sin B$이므로 조건 (나)에서

$\sin A=2\sin A\cos C$ $\therefore \cos C=\frac{1}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=60^\circ$

$A=B=\frac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$이므로

$4\cos A=4\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$ 답 ②

다른풀이 조건 (가)에서 $a=b$ ← 본풀이 참조

조건 (나)에서 $\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a=\frac{a^2+b^2-c^2}{a}$, $a^2=a^2+b^2-c^2$

$b^2=c^2$ $\therefore b=c$ ($\because b>0$, $c>0$)

즉 $a=b=c$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

따라서 $C=60^\circ$이므로

$4\cos C=4\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

03 삼각형 ADC의 세 내각의 크기의 합이 π이므로

$\frac{\pi}{3}+\left(\angle DAB+\frac{\pi}{6}\right)+\angle ACD=\pi$

$\therefore \angle DAB=\frac{\pi}{2}-\angle ACD$

이때 $\sin(\angle DAB)=\frac{1}{4}$에서

$\sin(\angle DAB)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle ACD\right)=\cos(\angle ACD)$

이므로 $\cos(\angle ACD)=\frac{1}{4}$

$0<\angle ACD<\pi$에서 $\sin(\angle ACD)>0$이므로

$\sin(\angle ACD)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ACD)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$, $\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\overline{AD}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{5}$ 답 ②

04 $\angle ADB=\alpha$라 하면 $\angle ADC=\pi-\alpha$

$\overline{AD}=x$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\alpha=\frac{x^2+4^2-7^2}{2\times x\times 4}=\frac{x^2-33}{8x}$ …… ㉠

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\alpha)=\frac{x^2+2^2-5^2}{2\times x\times 2}$

$-\cos\alpha=\frac{x^2-21}{4x}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{-x^2+21}{4x}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{x^2-33}{8x}=\frac{-x^2+21}{4x}$

$x^2-33=2(-x^2+21)$

$x^2-33=-2x^2+42$, $3x^2=75$

$x^2=25$ $\therefore x=5$ ($\because x>0$)

즉 $\overline{AD}=5$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle BAD)=\frac{5^2+7^2-4^2}{2\times 5\times 7}=\frac{29}{35}$ 답 ③

05 $\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C+1=0$에서

$(1-\sin^2 A)-(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)+1=0$

$-\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=0$

$\therefore \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다. 답 ④

06 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{7}:2\sqrt{2}:3$

따라서 $a=\sqrt{7}k$, $b=2\sqrt{2}k$, $c=3k\,(k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(2\sqrt{2}k)^2+(3k)^2-(\sqrt{7}k)^2}{2\times2\sqrt{2}k\times3k}=\frac{10k^2}{12\sqrt{2}k^2}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$ 답 ①

07 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{CD}:\overline{DA}=\overline{BC}:\overline{BA}=8:6=4:3$

$\overline{AC}=7$이므로

$\overline{CD}=4$, $\overline{DA}=3$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{6^2+7^2-8^2}{2\times6\times7}=\frac{1}{4}$ ····· ㉠

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos A$

$=36+9-2\times6\times3\times\frac{1}{4}\ (\because$ ㉠$)$

$=36$

$\therefore \overline{BD}=6$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ADB)=\frac{6^2+3^2-6^2}{2\times6\times3}=\frac{1}{4}$ 답 ①

다른풀이 삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{BD}=6$인 이등변삼각형이므로

$\angle ADB=\angle DAB$

$\therefore \cos(\angle ADB)=\cos(\angle DAB)=\frac{1}{4}$

08 $\overline{BD}:\overline{DC}=3:2$이므로

$\triangle ABD:\triangle ADC=3:2$

$3\triangle ADC=2\triangle ABD$

$3\times\left\{\frac{1}{2}\times7\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAC)\right\}$

$=2\times\left\{\frac{1}{2}\times6\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD)\right\}$

$21\sin(\angle DAC)=12\sin(\angle BAD)$

$\therefore \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)}=\frac{7}{4}$ 답 ⑤

09 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\times7\times8}=\frac{2}{7}$

$0<A<\pi$에서 $\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

사인법칙에 의하여 $\frac{9}{\sin A}=2R$이므로

$R=\frac{9}{2\sin A}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{\frac{3\sqrt{5}}{7}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

한편 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}bc\sin A$이므로

$\frac{1}{2}\times r\times(9+8+7)=\frac{1}{2}\times8\times7\times\frac{3\sqrt{5}}{7}$

$12r=12\sqrt{5}$ $\therefore r=\sqrt{5}$

$\therefore Rr=\frac{21\sqrt{5}}{10}\times\sqrt{5}=\frac{21}{2}$ 답 ②

10 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

ㄱ. $a\sin A=b\sin B+c\sin C$에서 사인법칙에 의하여

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}+c\times\frac{c}{2R}$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

즉 삼각형 ABC는 $A=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

ㄴ. $\frac{\sin A}{\sin B}=2\cos C$에서 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b}{2R}}=2\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $a^2=a^2+b^2-c^2$

$b^2=c^2$ $\therefore b=c\ (\because b>0,\ c>0)$

즉 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이다.

ㄷ. $a\cos A=b\cos B+c\cos C$에서 코사인법칙에 의하여

$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+c\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)$

$-a^4=2b^2c^2-b^4-c^4$, $a^4=(b^2-c^2)^2$

$a^2=b^2-c^2$ 또는 $a^2=-b^2+c^2$

$\therefore a^2+c^2=b^2$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

즉 삼각형 ABC는 $B=\frac{\pi}{2}$ 또는 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

따라서 직각삼각형이 되도록 하는 관계식은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

11 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

$\frac{1}{2}\times24\times40\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times24\times\overline{AD}\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times40\times\overline{AD}\times\sin60^\circ$

$120=3\overline{AD}+5\overline{AD}$ $\therefore \overline{AD}=15$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

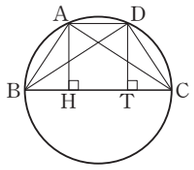
$\overline{BD}^2=24^2+15^2-2\times24\times15\times\cos60^\circ$

$=576+225-2\times24\times15\times\frac{1}{2}=441$

$\therefore \overline{BD}=21$

$\therefore \overline{AD}+\overline{BD}=15+21=36$ 답 ⑤

12 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다. 두 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, T라 하면



$\overline{HT}=\overline{AD}=40(\mathrm{m})$

$\overline{BH}=\overline{TC}=\frac{1}{2}\times(100-40)=30(\mathrm{m})$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$\cos(\angle ABH)=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$ $\therefore \angle ABH=60^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=60^2+100^2-2\times60\times100\times\cos60^\circ$

$=60^2+100^2-2\times60\times100\times\frac{1}{2}$

$=7600$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7600}$

원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R$

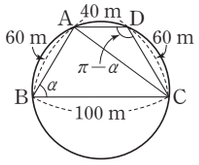
이므로

$R=\frac{\overline{AC}}{2\sin(\angle ABC)}=\frac{\sqrt{7600}}{2\sin60^\circ}=\frac{\sqrt{7600}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{7600}}{\sqrt{3}}$

따라서 구하는 원 모양의 농장의 넓이는

$\pi R^2=\pi\left(\frac{\sqrt{7600}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{7600}{3}\pi(\mathrm{m}^2)$ 답 ③

다른풀이 $\overline{AC}$의 길이를 다른 방법으로 구하기



$\angle B=\alpha$라 하면

$\angle D=\pi-\alpha$

선분 AC를 그으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=60^2+100^2-2\times60\times100\times\cos\alpha$

$=13600-12000\cos\alpha$ …… ㉠

삼각형 DAC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=40^2+60^2-2\times40\times60\times\cos(\pi-\alpha)$

$=5200+4800\cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $13600-12000\cos\alpha=5200+4800\cos\alpha$이므로

$16800\cos\alpha=8400$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=60^\circ$

따라서 ㉠에서 $\overline{AC}^2=13600-12000\times\frac{1}{2}=7600$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{7600}$

13 $A+B+C=\pi$에서 $A+B=\pi-C$이므로

$\cos(A+B)=\frac{1}{2}$에서 $\cos(\pi-C)=\frac{1}{2}$

$-\cos C=\frac{1}{2}$, 즉 $\cos C=-\frac{1}{2}$

$0<C<\pi$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{BC}+\overline{CA}=11$에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면

$a+b=11$이므로 $b=11-a$이고, $c=10$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$10^2=a^2+(11-a)^2-2\times a(11-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore a^2-11a+21=0$ …… ㉢

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times a(11-a)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a(11-a)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times21$ ($\because$ ㉢에서 $a(11-a)=21$)

$=\frac{21\sqrt{3}}{4}$ 답 ⑤

14 $\angle OBA=\angle OAB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$이므로

삼각형 AOB는 정삼각형이고 $\overline{AB}=2$

이때 삼각형 AO′B에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=r^2+r^2-2\times r\times r\times\cos45^\circ$

$2^2=r^2+r^2-2\times r\times r\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$4=2r^2-\sqrt{2}r^2$, $4=(2-\sqrt{2})r^2$

$\therefore r^2=\frac{4}{2-\sqrt{2}}=2(2+\sqrt{2})$

$\therefore \square AOBO'=\triangle AOB+\triangle AO'B$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2+\frac{1}{2}\times r\times r\times\sin45^\circ$

$=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times2(2+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$ 답 ④

15 $\triangle ADE=\frac{1}{3}\triangle ABC$이므로 $\overline{AD}=x$, $\overline{AE}=y$라 하면

$\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin A\right)$

$\therefore xy=4$

$\therefore \overline{AD}+\overline{AE}=x+y\geq2\sqrt{xy}=2\sqrt{4}=4$

(단, 등호는 $x=y=2$일 때 성립)

따라서 $\overline{AD}+\overline{AE}$의 최솟값은 4이다. 답 ④

16 $\overline{CE}=x$라 하면 $\overline{CD}=x+\frac{2\sqrt{2}}{3}$

호 BC에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle A=\angle E$

$\therefore \cos E=\cos A=\frac{13\sqrt{2}}{24}$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=4^2+x^2-2\times4\times x\times\cos E$

$=4^2+x^2-2\times4\times x\times\frac{13\sqrt{2}}{24}$

$=16+x^2-\frac{13\sqrt{2}}{3}x$

$x^2+\frac{4\sqrt{2}}{3}x+\frac{8}{9}=16+x^2-\frac{13\sqrt{2}}{3}x$

$\frac{17\sqrt{2}}{3}x=\frac{136}{9}$ $\therefore x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

즉 $\overline{CE}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이므로 $\overline{CD}=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

그런데 $\angle A=\angle E$, $\angle ADB=\angle EDC$이므로

$\triangle ABD\backsim\triangle ECD$(AA 닮음)이고

$2:\frac{4\sqrt{2}}{3}=\overline{BD}:2\sqrt{2}$, $\frac{4\sqrt{2}}{3}\overline{BD}=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BD}=3$

$\therefore \overline{BE}=\overline{BD}+\overline{DE}=3+4=7$

따라서 삼각형 EBC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=7^2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2-2\times7\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\cos E$

$=7^2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2-2\times7\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{13\sqrt{2}}{24}$

$=49+\frac{32}{9}-\frac{182}{9}=\frac{97}{3}$

답 ⑤

17 점 I는 모서리 BC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overline{IC}=\overline{BC}\times\frac{3}{2+3}=10\times\frac{3}{2+3}=6$

점 J는 모서리 CD의 중점이므로

$\overline{CJ}=\overline{CD}\times\frac{1}{2}=4\times\frac{1}{2}=2$

점 K는 모서리 GC를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{CK}=\overline{GC}\times\frac{2}{3+2}=5\times\frac{2}{3+2}=2$

직각삼각형 ICJ에서

$\overline{IJ}=\sqrt{\overline{IC}^2+\overline{CJ}^2}=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

직각삼각형 IKC에서

$\overline{IK}=\sqrt{\overline{IC}^2+\overline{CK}^2}=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

직각삼각형 JCK에서

$\overline{KJ}=\sqrt{\overline{CK}^2+\overline{CJ}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 IKJ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{10})^2+(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{10})^2}{2\times2\sqrt{10}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

답 ②

18 선분 AC를 그으면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(2\sqrt{3}-2)^2+4^2-2\times(2\sqrt{3}-2)\times4\times\cos120^\circ$

$=(12-8\sqrt{3}+4)+16-2\times(2\sqrt{3}-2)\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=24$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{6}$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{6}}{\sin120^\circ}=\frac{4}{\sin(\angle CAD)}$, $\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sin(\angle CAD)}$

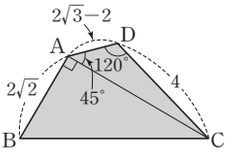
$\sin(\angle CAD)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \angle CAD=45^\circ$

$\therefore \angle BAC=135^\circ-45^\circ=90^\circ$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABC+\triangle DAC$



$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}+\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-2)\times4\times\sin120^\circ$

$=4\sqrt{3}+2(2\sqrt{3}-2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=4\sqrt{3}+\sqrt{3}(2\sqrt{3}-2)$

$=6+2\sqrt{3}$

답 ④

19 $\angle ABC=\theta$라 하면

$\triangle ABE=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times8\times\sin(90^\circ+\theta)$

$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times8\times\cos\theta$

$=24\sqrt{2}\cos\theta$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(6\sqrt{2})^2+8^2-(4\sqrt{3})^2}{2\times6\sqrt{2}\times8}$

$=\frac{11\sqrt{2}}{24}$ …… ❶

$\therefore \triangle ABE=24\sqrt{2}\times\frac{11\sqrt{2}}{24}=22$ …… ❷

답 22

채점기준	배점
❶ $\angle ABC=\theta$로 놓고 $\cos\theta$의 값 구하기	3
❷ 삼각형 ABE의 넓이 구하기	2

20 직각삼각형 DEC에서 $\angle DCE+\angle DEC=90^\circ$이고

$\angle DCE:\angle DEC=1:2$이므로

$\angle DCE=90^\circ\times\frac{1}{1+2}=30^\circ$, $\angle DEC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\therefore \overline{DE}=2$, $\overline{CD}=2\sqrt{3}$ …… ❶

$\overline{BD}=x$, $\overline{AD}=\overline{BE}=y$라 하면 직각삼각형 ADC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{12-y^2}$

$\overline{AB}=x+y$, $\overline{BC}=y+4$이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$(x+y)^2+(\sqrt{12-y^2})^2=(y+4)^2$

$\therefore x^2=y^2+8y+4-2xy$ …… ㉠ …… ❷

또 삼각형 BED에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=y^2+2^2-2\times y\times2\times\cos120^\circ$

$\therefore x^2=y^2+4+2y$ …… ㉡ …… ❸

㉠, ㉡에서

$y^2+8y+4-2xy=y^2+4+2y$

$2xy=6y$ $\therefore x=3\ (\because y>0)$

$\therefore \overline{BD}=3$ ····· ❹

답 3

채점기준	배점
❶ $\overline{DE}$, $\overline{CD}$의 길이 각각 구하기	1
❷ $\overline{BD}=x$, $\overline{AD}=\overline{BE}=y$로 놓고 직각삼각형 ABC에서 x, y에 대한 관계식 구하기	2
❸ 코사인법칙을 이용하여 x, y에 대한 관계식 구하기	2
❹ $\overline{BD}$의 길이 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제 p.56~58

1 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$이므로

$\overline{AB}=3k$, $\overline{BC}=2k\ (k>0)$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(3k)^2+(2k)^2-2\times3k\times2k\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=(3k)^2+(2k)^2-2\times3k\times2k\times\frac{1}{2}$

$=9k^2+4k^2-6k^2=7k^2$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}k\ (\because k>0)$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{7}k}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $\frac{\sqrt{7}k}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$\therefore R=\frac{\sqrt{21}}{3}k$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 7π이므로

$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{\sqrt{21}}{3}k\right)^2=\frac{7}{3}\pi k^2=7\pi$, $k^2=3$

$\therefore k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$

따라서 $\overline{AB}=3\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$ 답 ①

2 $\overline{AB}:\overline{BC}=\sqrt{3}:1$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{3}k$, $\overline{BC}=k\ (k>0)$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(\sqrt{3}k)^2+k^2-2\times\sqrt{3}k\times k\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=(\sqrt{3}k)^2+k^2-2\times\sqrt{3}k\times k\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=3k^2+k^2-3k^2=k^2$

$\therefore \overline{AC}=k\ (\because k>0)$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R$, $\frac{k}{\frac{1}{2}}=2R$ $\therefore R=k$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 2π이므로

$\pi R^2=\pi\times k^2=2\pi$, $k^2=2$

$\therefore k=\sqrt{2}\ (\because k>0)$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ②

3 $\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\overline{PQ}:3\sqrt{2}=\sqrt{2}:3$이므로

$3\overline{PQ}=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$ $\therefore \overline{PQ}=2$

이때 $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QC}=3:2:1$이므로

$\overline{BP}=3$, $\overline{PQ}=2$, $\overline{QC}=1$

$\therefore \overline{BQ}=\overline{BP}+\overline{PQ}=3+2=5$

$\overline{AB}=2\sqrt{7}$, $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{7}\times5}=\frac{35}{20\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\overline{AB}=2\sqrt{7}$, $\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{QC}=3+2+1=6$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times2\sqrt{7}\times6\times\cos B$

$=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times2\sqrt{7}\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=28+36-42=22$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{22}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$, $\frac{\sqrt{22}}{\sin B}=2R$ $\therefore R=\frac{\sqrt{22}}{2\sin B}$

이때 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$이므로

$R=\frac{\sqrt{22}}{2\sin B}=\frac{\sqrt{22}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{22}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2=\frac{88}{9}\pi$ 답 ②

4 $\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\overline{PQ}:3=1:3$이므로

$\overline{PQ}=1$

이때 $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QC}=2:1:1$이므로

$\overline{BP}=2$, $\overline{PQ}=1$, $\overline{QC}=1$

$\therefore \overline{BQ}=\overline{BP}+\overline{PQ}=2+1=3$

$\overline{AB}=2\sqrt{5}$, $\overline{AQ}=3$이므로 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{(2\sqrt{5})^2+3^2-3^2}{2\times 2\sqrt{5}\times 3}=\dfrac{20}{12\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\overline{AB}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{QC}=2+1+1=4$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(2\sqrt{5})^2+4^2-2\times 2\sqrt{5}\times 4\times\cos B$

$=(2\sqrt{5})^2+4^2-2\times 2\sqrt{5}\times 4\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$=20+16-\dfrac{80}{3}=\dfrac{28}{3}$

$\therefore \overline{AC}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R,\ \dfrac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sin B}=2R$

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{21}}{3\sin B}$

이때 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$이므로

$R=\dfrac{\sqrt{21}}{3\sin B}=\dfrac{\sqrt{21}}{3\times\frac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)^2=\dfrac{21}{4}\pi$ 답 ③

5 한 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle BDC=\angle BAC=\alpha$, $\angle ABD=\angle ACD=\beta$

$\therefore$ $\triangle AEB\backsim\triangle DEC$ (AA 닮음)

이때 두 삼각형 AEB, DEC의 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{DC}=4:8=1:2$

이므로

$\overline{BE}:\overline{CE}=1:2$

따라서 $\overline{BE}=k$, $\overline{CE}=2k\ (k>0)$라 하면

$\angle BEC=\alpha+\beta$ ($\because$ $\triangle ABE$의 외각의 성질)

$\overline{BC}=2\sqrt{30}$이므로 삼각형 EBC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{30})^2=k^2+(2k)^2-2\times k\times 2k\times\cos(\alpha+\beta)$

$(2\sqrt{30})^2=k^2+(2k)^2-2\times k\times 2k\times\left(-\dfrac{5}{12}\right)$

$120=k^2+4k^2+\dfrac{5}{3}k^2$

$120=\dfrac{20}{3}k^2,\ k^2=18$

$\therefore k=3\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

따라서 $\overline{BE}=3\sqrt{2}$, $\overline{AB}=4$이고, $\angle AEB=\pi-(\alpha+\beta)$이므로

$\overline{AE}=x$라 하면 삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=x^2+(3\sqrt{2})^2-2\times x\times 3\sqrt{2}\times\cos\{\pi-(\alpha+\beta)\}$

$4^2=x^2+(3\sqrt{2})^2-2\times x\times 3\sqrt{2}\times\{-\cos(\alpha+\beta)\}$

$4^2=x^2+(3\sqrt{2})^2-2\times x\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{5}{12}$

$16=x^2+18-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}x,\ 2x^2-5\sqrt{2}x+4=0$

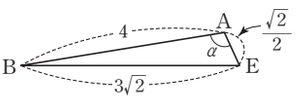
$x=\dfrac{5\sqrt{2}\pm\sqrt{(5\sqrt{2})^2-4\times 2\times 4}}{2\times 2}=\dfrac{5\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore x=2\sqrt{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $x=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AE}=2\sqrt{2}$ 답 ⑤

참고 $x=\overline{AE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이면



삼각형 ABE에서

$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=4^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{33}{2}$,

$\overline{BE}^2=(3\sqrt{2})^2=18$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2<\overline{BE}^2$

$\therefore \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

그런데 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6 한 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle BDC=\angle BAC=\alpha$, $\angle ABD=\angle ACD=\beta$

$\therefore$ $\triangle AEB\backsim\triangle DEC$ (AA 닮음)

이때 두 삼각형 AEB, DEC의 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{DC}=2:3$

이므로 $\overline{BE}:\overline{CE}=2:3$

따라서 $\overline{BE}=2k$, $\overline{CE}=3k\ (k>0)$라 하면

$\angle BEC=\alpha+\beta$ ($\because$ $\triangle ABE$의 외각의 성질),

$\overline{BC}=4$이므로 삼각형 EBC에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=(2k)^2+(3k)^2-2\times 2k\times 3k\times\cos(\alpha+\beta)$

$4^2=(2k)^2+(3k)^2-2\times 2k\times 3k\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

$16=4k^2+9k^2+3k^2$

$16=16k^2,\ k^2=1$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

따라서 $\overline{BE}=2$, $\overline{AB}=2$이고, $\angle AEB=\pi-(\alpha+\beta)$이므로

$\overline{AE}=x$라 하면 삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=x^2+2^2-2\times x\times 2\times\cos\{\pi-(\alpha+\beta)\}$

$2^2=x^2+2^2-2\times x\times 2\times\{-\cos(\alpha+\beta)\}$

$2^2=x^2+2^2-2\times x\times 2\times\dfrac{1}{4}$

$4=x^2+4-x$

$x^2-x=0,\ x(x-1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{AE}=1$ 답 ③

Ⅲ 수열

1 등차수열과 등비수열

교과서 예제 p.61

01 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$을 차례로 대입하면

(1) $a_1=3\times1-2=1$, $a_2=3\times2-2=4$,
$a_3=3\times3-2=7$, $a_4=3\times4-2=10$,
$a_5=3\times5-2=13$, $a_6=3\times6-2=16$

(2) $a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$,
$a_3=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$, $a_4=\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$,
$a_5=\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}$, $a_6=\frac{6}{6+1}=\frac{6}{7}$

(3) $a_1=(-1)^{1+1}=1$, $a_2=(-1)^{2+1}=-1$,
$a_3=(-1)^{3+1}=1$, $a_4=(-1)^{4+1}=-1$,
$a_5=(-1)^{5+1}=1$, $a_6=(-1)^{6+1}=-1$

답 (1) 1, 4, 7, 10, 13, 16
(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$
(3) 1, −1, 1, −1, 1, −1

02 (1) $a_1=2\times1=2$, $a_2=2\times2=4$,
$a_3=2\times3=6$, $a_4=2\times4=8$,
⋮
이므로 $a_n=2n$

(2) $a_1=9=10^1-1$, $a_2=99=10^2-1$,
$a_3=999=10^3-1$, $a_4=9999=10^4-1$,
⋮
이므로 $a_n=10^n-1$

(3) $a_1=1\times(1+2)$, $a_2=2\times(2+2)$,
$a_3=3\times(3+2)$, $a_4=4\times(4+2)$,
⋮
이므로 $a_n=n(n+2)$

답 (1) $a_n=2n$ (2) $a_n=10^n-1$ (3) $a_n=n(n+2)$

03 (1) $a_n=7+(n-1)\times3=3n+4$

(2) 첫째항이 10, 공차가 −4이므로
$a_n=10+(n-1)\times(-4)=-4n+14$

답 (1) $a_n=3n+4$ (2) $a_n=-4n+14$

04 네 수 −4, a, 8, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a는 −4와 8의 등차중항이고, 8은 a와 b의 등차중항이다. 즉

$a=\frac{-4+8}{2}$, $8=\frac{a+b}{2}$

$\therefore a=2, b=14$

답 $a=2, b=14$

05 (1) $S_{10}=\frac{10\times(6+42)}{2}=240$

(2) $S_{20}=\frac{20\times\{2\times(-4)+(20-1)\times3\}}{2}=490$

답 (1) 240 (2) 490

06 (1) 수열 2, 9, 16, 23, …, 100을 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 7인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\times7=7n-5$

100을 제k항이라 하면 $a_k=100$에서

$7k-5=100$, $7k=105$ $\therefore k=15$

즉 100은 제15항이므로

$2+9+16+23+\cdots+100=\frac{15\times(2+100)}{2}=765$

(2) 수열 20, 14, 8, 2, …, −40을 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 20, 공차가 −6인 등차수열이므로

$a_n=20+(n-1)\times(-6)=-6n+26$

−40을 제k항이라 하면 $a_k=-40$에서

$-6k+26=-40$, $-6k=-66$ $\therefore k=11$

즉 −40은 제11항이므로

$20+14+8+2+\cdots+(-40)=\frac{11\times\{20+(-40)\}}{2}$

$=-110$

답 (1) 765 (2) −110

07 (i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(4n^2+n)-\{4(n-1)^2+(n-1)\}$
$=8n-3\ (n\geq2)$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=4\times1^2+1=5$

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 구하는 일반항 a_n은

$a_n=8n-3$

답 $a_n=8n-3$

08 (1) 공비는 $\frac{-6}{2}=-3$이므로

2, −6, $\boxed{18}$, $\boxed{-54}$, 162, …

(2) 공비는 $\frac{1}{3}$이므로

3, 1, $\boxed{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{9}$, $\boxed{\frac{1}{27}}$, …

답 (1) 18, −54 (2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{27}$

09 (1) $a_n=3\times3^{n-1}=3^n$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로

$a_n=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

답 (1) $a_n=3^n$ (2) $a_n=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

10 세 수 3, x, 75가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 x는 3과 75의 등비중항이다. 즉

$x^2=3\times75=225$

$\therefore x=\pm15$ 답 -15, 15

11 첫째항부터 제7항까지의 합 S_7은

$$S_7=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{127}{32}$$ 답 $\frac{127}{32}$

12 (1) 수열 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, …을 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{n\text{개}}$

$=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

(2) 수열 4, 8, 16, 32, …를 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=4\times2^{n-1}=2^2\times2^{n-1}=2^{n+1}$

$\therefore \underbrace{4+8+16+32+\cdots+2^{n+1}}_{n\text{개}}$

$=\frac{4\times(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)$

답 (1) $\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ (2) $4(2^n-1)$

13 (1) (i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=5-4=1$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-4)-(5^{n-1}-4)$

$=5^n-5^{n-1}=5^{n-1}\times(5-1)$

$=4\times5^{n-1}\ (n\geq2)$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=1$, $a_n=4\times5^{n-1}\ (n\geq2)$

(2) (i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^{1+1}-3=6$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$

$=3^{n+1}-3^n=3^n\times(3-1)$

$=2\times3^n\ (n\geq2)$ …… ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\times3^n$

답 (1) $a_1=1$, $a_n=4\times5^{n-1}\ (n\geq2)$ (2) $a_n=2\times3^n$

기출 Best | 1회 p.62~66

01 등차수열 20, 17, 14, 11, …을 $\{a_n\}$이라 하면 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 20, 공차는 -3이므로

$a_n=20+(n-1)\times(-3)=-3n+23$

-121을 제n항이라 하면

$-3n+23=-121$, $-3n=-144$

$\therefore n=48$

따라서 -121은 제48항이다. 답 ②

02 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_{10}=(a+2d)+(a+9d)$

$=2a+11d=67$ …… ㉠

$a_6+a_{15}=(a+5d)+(a+14d)$

$=2a+19d=107$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $d=5$

따라서 $a_n=6+(n-1)\times5=5n+1$이므로

$a_{29}=5\times29+1=146$ 답 ①

03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{17}=a+16d=52$ …… ㉠

$a_{30}=a+29d=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=100$, $d=-3$

$\therefore a_n=100+(n-1)\times(-3)=-3n+103$

$-3n+103<0$에서 $3n>103$

$\therefore n>\frac{103}{3}=34.\times\times\times$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제35항이다. 답 ③

04 주어진 등차수열의 첫째항이 35, 제12항이 2이므로 공차를 d라 하면

$35+11d=2$, $11d=-33$

$\therefore d=-3$ 답 ③

05 세 수 5, x, y가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\frac{5+y}{2}$ $\therefore 2x=5+y$ …… ㉠

세 수 x, y, 11이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$y=\frac{x+11}{2}$ $\therefore 2y=x+11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=7$, $y=9$

$\therefore xy=7\times9=63$ 답 ⑤

다른풀이 주어진 등차수열의 첫째항이 5, 제4항이 11이므로 공차를 d라 하면

$5+3d=11$, $3d=6$ $\therefore d=2$

즉 $x=5+d=5+2=7$, $y=5+2d=5+4=9$이므로
$xy=7\times9=63$

06 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면 세 수의 합이 12이므로
$(a-d)+a+(a+d)=12$
$3a=12$ $\therefore a=4$
세 수의 곱이 -132이므로
$(4-d)\times4\times(4+d)=-132$
$16-d^2=-33$, $d^2=49$
$\therefore d=\pm7$
(i) $a=4$, $d=-7$일 때, 세 수를 구하면
$4-(-7)=11$, 4, $4+(-7)=-3$
(ii) $a=4$, $d=7$일 때, 세 수를 구하면
$4-7=-3$, 4, $4+7=11$
(i), (ii)에서 세 수는 -3, 4, 11이므로 세 수의 제곱의 합은
$(-3)^2+4^2+11^2=146$ 답 ③

07 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5=a+4d=12$ …… ㉠
$a_{21}=a+20d=-20$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=20$, $d=-2$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제25항까지의 합은
$\frac{25\times\{2\times20+(25-1)\times(-2)\}}{2}=-100$ 답 ④

08 첫째항이 -5, 제$(n+2)$항이 15, 항의 개수가 $(n+2)$인 등차수열의 모든 항의 합이 100이므로
$\frac{(n+2)\times(-5+15)}{2}=100$
$10(n+2)=200$, $n+2=20$ $\therefore n=18$ 답 ①

09 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$S_5=\frac{5\times\{2a+(5-1)d\}}{2}=140$
$5(2a+4d)=280$
$\therefore a+2d=28$ …… ㉠
$S_{15}=\frac{15\times\{2a+(15-1)d\}}{2}=570$
$15(2a+14d)=1140$
$\therefore a+7d=38$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=24$, $d=2$
$\therefore S_{30}=\frac{30\times\{2\times24+(30-1)\times2\}}{2}=1590$ 답 ②

10 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5=a+4d=7$ …… ㉠
$a_{13}=a+12d=-17$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=19$, $d=-3$
$\therefore a_n=19+(n-1)\times(-3)=-3n+22$
이때 $-3n+22<0$에서 $-3n<-22$
$\therefore n>7.\times\times\times$
즉 등차수열 $\{a_n\}$의 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.
따라서 S_n의 최댓값은
$S_7=\frac{7\times\{2\times19+(7-1)\times(-3)\}}{2}=70$ 답 ②

11 100과 200 사이에 있는 9의 배수는
108, 117, 126, …, 198 …… ㉠
이때 $198=108+9\times10$이므로 198은 첫째항이 108, 공차가 9인 수열의 11번째 항이다.
따라서 ㉠의 총합은 첫째항이 108, 끝항이 198, 항의 개수가 11인 등차수열의 합이므로
$\frac{11\times(108+198)}{2}=1683$ 답 ①

12

	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열
1행	2	3	4	5	6	7	8	9
2행	3	5	7	9	11	13	15	17
3행	4	7	10	13	16	19	22	25
4행	5	9	13	17	21	25	29	33
5행	6	11	16	21	26	31	36	41
6행	7	13	19	25	31	37	43	49
7행	8	15	22	29	36	43	50	57
8행	9	17	25	33	41	49	57	65

각 열은 첫째항이 각각 2, 3, 4, …, 8, 9이고
공차가 각각 1, 2, 3, …, 7, 8인 등차수열을 이룬다.
따라서 6열에 채워지는 수는
7, 13, 19, …, 43, 49
이므로 첫째항이 7, 끝항이 49, 항의 개수가 8인 등차수열의 합을 구하면
$\frac{8\times(7+49)}{2}=224$ 답 ③

13 $S_n=n^2-3n$에서
(i) $n=1$일 때
$a_1=S_1=1^2-3\times1=-2$
(ii) $n\geq2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-3n-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$
$=2n-4$ …… ㉠
이때 $a_1=-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n-4$

$\therefore a_{10}=2\times10-4=16$

$\therefore a_1+a_{10}=-2+16=14$ 답 ②

다른풀이 $a_1=S_1=1^2-3\times1=-2$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=10^2-3\times10-(9^2-3\times9)=16$

이므로 $a_1+a_{10}=-2+16=14$

14 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=6$ ····· ㉠

$a_5=ar^4=48$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=6$ $\therefore a=3$

따라서 $a_n=3\times2^{n-1}$이므로

$a_{10}=3\times2^9=1536$ 답 ①

15 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_3a_5=ar^2\times ar^4=a^2r^6=16$ ····· ㉠

$a_4a_6=ar^3\times ar^5=a^2r^8=256$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=16$ $\therefore r=4$ $(\because r>0)$

$r=4$를 ㉠에 대입하면

$a^2\times4^6=16$, $a^2=4^{-4}$

$\therefore a=4^{-2}=\frac{1}{16}$

따라서 $a_n=\frac{1}{16}\times4^{n-1}$이므로

$a_8=\frac{1}{16}\times4^7=1024$ 답 ③

16 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$a_n=2^{n-1}$

$a_n>1000$에서 $2^{n-1}>1000$

$2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\geq10$ $\therefore n\geq11$

따라서 자연수 n의 최솟값은 11이다. 답 ④

17 6, x, y, z, 486이 이 순서대로 첫째항이 6, 제5항이 486인 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면

$486=6r^4$, $r^4=81$, $r^2=9$

$\therefore r=3$ $(\because x, y, z$가 양수)

따라서 주어진 등비수열을 $\{a_n\}$이라 하면 일반항 a_n은

$a_n=6\times3^{n-1}$

x는 제2항, y는 제3항, z는 제4항이므로

$x=a_2=6\times3^1=18$

$y=a_3=6\times3^2=54$

$z=a_4=6\times3^3=162$

$\therefore x+y+z=18+54+162=234$ 답 ③

18 나머지정리에 의하여 다항식 $P(x)=x^2+ax-1$을

$x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=1-a-1=-a$

$x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=1+a-1=a$

$x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2)=4+2a-1=2a+3$

$-a$, a, $2a+3$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=-a(2a+3)$, $a^2=-2a^2-3a$

$3a^2+3a=0$, $3a(a+1)=0$

$\therefore a=-1$ $(\because a\neq0)$ 답 ②

19 삼차방정식 $3x^3-px^2+13x-3=0$의 세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=\frac{p}{3}$ ····· ㉠

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=\frac{13}{3}$ ····· ㉡

$a\times ar\times ar^2=1$ ····· ㉢

㉢에서 $(ar)^3=1$ $\therefore ar=1$

㉡에 $ar=1$을 대입하면 $a+ar^2+ar=\frac{13}{3}$이므로 ㉠에서

$\frac{p}{3}=\frac{13}{3}$ $\therefore p=13$ 답 ③

20 1회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$9\times\frac{2}{3}$

2회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$9\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$9\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

따라서 12회 반복했을 때, 남아 있는 선분의 길이는

$9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$ 답 ⑤

21 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_3+a_5=ar^2+ar^4=ar^2(1+r^2)=100$ ····· ㉠

$a_5+a_7=ar^4+ar^6=ar^4(1+r^2)=400$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$4a(1+4)=100$ $\therefore a=5$

$\therefore S_8=\frac{5\times(2^8-1)}{2-1}=1275$ 답 ⑤

22 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=30$ …… ㉠

$S_8=\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^4+1)(r^4-1)}{r-1}=120$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4+1=4 \quad \therefore r^4=3$

$\therefore S_{12}=\dfrac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^4-1)\{(r^4)^2+r^4+1\}}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}\times\{(r^4)^2+r^4+1\}$

$=30\times(3^2+3+1)$

$=30\times13=390$ 답 ④

23 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이는 5이므로

$a_1=5^2=25$

직각이등변삼각형 $A_1A_2D_2$에서

$\overline{A_2D_2}=\dfrac{5}{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $5:\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, 즉 $1:\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, 즉 $1:\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 25, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\dfrac{25\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}$

$=50\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$ 답 ①

24 (i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\times3^n-\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\times3^{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times3^n-\dfrac{1}{2}\times3^{n-1}=\dfrac{1}{2}\times3^{n-1}\times(3-1)$

$=3^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3^{n-1}$

따라서 $a_6=3^5=243$이므로

$a_1+a_6=1+243=244$ 답 ⑤

25 구하는 적립금의 원리합계는

$50(1+0.02)+50(1+0.02)^2+50(1+0.02)^3$

$+\cdots+50(1+0.02)^{10}$

$=\dfrac{50\times1.02\times(1.02^{10}-1)}{1.02-1}$

$=\dfrac{51\times(1.2-1)}{0.02}=510$(만 원) 답 ②

참고 **원리합계**

(1) 원금과 이자의 합계를 원리합계라 한다.

(2) 연이율이 r이고 1년마다 복리로 매년 초에 a원씩 n년 동안 적립할 때, n년 후 적립금의 원리합계는

$\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$

기출 Best | 2회 p.67~71

01 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 4이므로 첫째항을 a라 하면

$a_5=a+4\times4=1 \quad \therefore a=-15$

$\therefore a_n=-15+(n-1)\times4=4n-19$

$a_k=37$에서

$4k-19=37 \quad \therefore k=14$ 답 ③

02 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d\neq0)$라 하자.

$|a_3|=|a_5|$에서 $a_3=\pm a_5$

이때 $a_3=a_5$이면 $a+2d=a+4d$, 즉 $d=0$이므로

$a_3=-a_5$

$a+2d=-(a+4d)$, $a+2d=-a-4d$

$2a+6d=0 \quad \therefore a+3d=0$ …… ㉠

$a_{10}+a_{11}=(a+9d)+(a+10d)=2a+19d=91$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-21$, $d=7$

따라서 $a_n=-21+(n-1)\times7=7n-28$이므로

$a_8=7\times8-28=28$ 답 ①

03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=-39$ …… ㉠

$a_{16}=a+15d=31$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-44$, $d=5$

$\therefore a_n=-44+(n-1)\times5=5n-49$

$a_n>0$에서 $5n-49>0$

$5n>49 \quad \therefore n>\dfrac{49}{5}=9.8$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다. 답 ④

04 주어진 등차수열의 첫째항이 1, 제12항이 100이므로 공차를 d라 하면

$1+11d=100$, $11d=99 \quad \therefore d=9$ 답 ③

05 a, 5, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{a+b}{2}=5 \quad \therefore a+b=10 \quad \cdots\cdots$ ㉠

b, 1, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{b+c}{2}=1 \quad \therefore b+c=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

5, b, 1이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{5+1}{2}=3$

$b=3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$a=7$, $c=-1$

$\therefore a-b+c=7-3+(-1)=3$ 답 ①

06 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ $(d>0)$라 하면 네 수의 합이 8이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8$

$4a=8 \quad \therefore a=2$

가장 큰 수가 가장 작은 수의 3배이므로

$2+3d=3(2-3d)$

$2+3d=6-9d$, $12d=4 \quad \therefore d=\frac{1}{3}$

따라서 네 수 중 가장 큰 수는

$2+3\times\frac{1}{3}=3$ 답 ④

07 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_7)$

$=\frac{7(a_1+a_7)}{2}+\frac{7(b_1+b_7)}{2}$

$=\frac{7}{2}\{(a_1+a_7)+(b_1+b_7)\}$

$=\frac{7}{2}\{(a_1+b_1)+(a_7+b_7)\}$

$=\frac{7}{2}\{3+(a_7+b_7)\}=56$

$3+(a_7+b_7)=16$

$\therefore a_7+b_7=13$ 답 ②

08 첫째항이 -3, 제$(n+2)$항이 51인 등차수열의 합이 264이므로

$\frac{(n+2)\times(-3+51)}{2}=264$

$n+2=11 \quad \therefore n=9$

이때 51은 이 수열의 제11항이므로 공차를 d라 하면

$-3+10d=51 \quad \therefore 10d=54$

$\therefore n+10d=9+54=63$ 답 ④

09 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_9-S_6=0$에서 $a_9+a_8+a_7=0$

$(a+8d)+(a+7d)+(a+6d)=0$

$\therefore a+7d=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_8=\frac{8\times\{2a+(8-1)d\}}{2}=84$

$\therefore 2a+7d=21 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=21$, $d=-3$

$\therefore a_2=21+(2-1)\times(-3)=18$ 답 ④

10 첫째항이 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_4=\frac{4\times\{2\times(-4)+(4-1)d\}}{2}=-16+6d$

$S_9=\frac{9\times\{2\times(-4)+(9-1)d\}}{2}=-36+36d$

$S_4=S_9$에서 $-16+6d=-36+36d$

$30d=20 \quad \therefore d=\frac{2}{3}$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n-\frac{14}{3}$

$a_n>0$에서 $\frac{2}{3}n-\frac{14}{3}>0$

$\frac{2}{3}n>\frac{14}{3} \quad \therefore n>7$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소이다. ($a_8=\frac{2}{3}$)

따라서 S_n의 최솟값은

$S_7=\frac{7\times\left\{2\times(-4)+(7-1)\times\frac{2}{3}\right\}}{2}=-14$ 답 ②

참고 $a_n=\frac{2}{3}n-\frac{14}{3}$일 때, $a_6=-\frac{2}{3}<0$, $a_7=0$, $a_8=\frac{2}{3}>0$

11 10과 99 사이에 있는 자연수 중 7로 나누었을 때 나머지가 2인 수는

16, 23, 30, ..., 93 $\quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $93=16+7\times11$이므로 93은 첫째항이 16, 공차가 7인 등차수열의 12번째 항이다.

따라서 ㉠의 총합은 첫째항이 16, 끝항이 93, 항의 개수가 12인 등차수열의 합이므로

$\frac{12\times(16+93)}{2}=654$ 답 ③

12 두 직선과 선분의 교점의 x좌표를 t라 할 때 선분의 길이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=k(t-2)-t=(k-1)t-2k$

즉 y축에 평행한 8개의 선분의 길이는 등차수열을 이루므로 가장 짧은 것부터 가장 긴 것까지의 선분의 길이를 수열 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1=5$, $a_8=12$

따라서 8개의 선분의 길이의 합은

$\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8\times(5+12)}{2}=68$ 답 ⑤

13 $S_n=n^2+4n+k$에서

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+4\times1+k=k+5$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+4n+k-\{(n-1)^2+4(n-1)+k\}$

$=2n+3$ ····· ㉠

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=k+5$와 같아야 하므로

$k+5=5$ $\therefore k=0$

$\therefore a_n=2n+3\ (n\geq1)$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 $d=2$이므로

$k+d=0+2=2$ 답 ②

14 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$a_3=ar^2=6$ ····· ㉠

$a_7=ar^6=54$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4=9$ $\therefore r=9^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면

$a\times(\sqrt{3})^2=6$, $3a=6$ $\therefore a=2$

$\therefore a_{12}=ar^{11}=2\times(\sqrt{3})^{11}$

$=2\times3^5\times\sqrt{3}=486\sqrt{3}$ 답 ⑤

15 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1a_3=a_1\times a_1r^2=36$ $\therefore {a_1}^2\times r^2=36$ ····· ㉠

$\frac{a_5}{a_2}=\frac{a_1r^4}{a_1r}=r^3=8$ $\therefore r=2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

${a_1}^2\times4=36$, ${a_1}^2=9$

$\therefore a_1=3\ (\because a_n>0)$

$\therefore a_6=a_1r^5=3\times2^5=96$ 답 ③

16 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=\frac{3}{4}$ ····· ㉠

$a_5=ar^4=\frac{3}{32}$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_n<\frac{1}{1000}$에서

$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1000}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{3000}$

$\therefore 2^n>3000$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n\geq12$

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이다. 답 ③

17 243은 첫째항이 3, 공비가 r인 등비수열의 제$(n+2)$항이므로

$3\times r^{n+1}=243$ $\therefore r^{n+1}=81$

이때 $r^{n+1}=81^1=9^2=3^4$이므로

$r=81$, $\underbrace{n+1=1}_{n=0}$ 또는 $r=9$, $\underbrace{n+1=2}_{n=1}$ 또는 $r=3$, $\underbrace{n+1=4}_{n=3}$

따라서 자연수 r, n의 순서쌍 (r, n)은 $(9, 1)$, $(3, 3)$이고,

$\frac{r}{n}=\frac{9}{1}=9$ 또는 $\frac{r}{n}=\frac{3}{3}=1$

이므로 $\frac{r}{n}$의 최솟값은 1이다. 답 ③

18 a, 5, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$10=a+b$ $\therefore b=10-a$ ····· ㉠

5, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=5b$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2=5(10-a)$, $a^2+5a-50=0$

$(a+10)(a-5)=0$

$\therefore a=-10\ (\because a\neq b)$ 답 ①

19 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, ar, $ar^2\ (a>0, r>0)$이라 하면

직육면체의 부피가 8이므로

$a\times ar\times ar^2=a^3r^3=(ar)^3=8$

$\therefore ar=2$

직육면체의 겉넓이가 42이므로

$2\times a\times ar+2\times ar\times ar^2+2\times ar^2\times a=42$

$a^2r+a^2r^3+a^2r^2=21$, $a^2r(1+r^2+r)=21$

$\therefore 2a(1+r+r^2)=21\ (\because ar=2)$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+ar+ar^2)=4a(1+r+r^2)$

$=2\times2a(1+r+r^2)$

$=2\times21=42$ 답 ③

20 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$

1회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$

⋮

20회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$ 답 ⑤

21 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\neq0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2:a_5=1:8$에서 $ar:ar^4=1:8$

$ar^4=8ar$, $r^3=8$ ($\because a>0$, $r>0$)

$\therefore r=2$

$a_5-a_1=60$에서

$ar^4-a=a(r^4-1)=15a=60$

$\therefore a=4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 4, 공비는 2이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{4\times(2^{10}-1)}{2-1}=4092$ 답 ⑤

22 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=3$ …… ㉠

$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=12$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{S_{20}}{S_{10}}=r^{10}+1=4$ $\therefore r^{10}=3$

$\therefore S_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$=3\times(3^2+3+1)=39$ 답 ④

23 1회 시행 후 색칠한 도형의 넓이를 a_1이라 하면

$a_1=4^2-\frac{1}{4}\times\pi\times4^2=16-4\pi$

직각이등변삼각형 OA_2B_2에서

$\overline{OA_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\overline{OB_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\overline{OA_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times4=2\sqrt{2}$

두 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 닮음비가

$4:2\sqrt{2}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1:\frac{1}{2}$이다.

따라서 7회 시행 후 색칠한 도형의 넓이의 합은

첫째항이 $16-4\pi$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$\frac{(16-4\pi)\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=(32-8\pi)\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}$ 답 ⑤

24 $S_n=10\times2^{2n-1}-k$에서

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=10\times2-k=20-k$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(10\times2^{2n-1}-k)-(10\times2^{2n-3}-k)$

$=10\times2^{2n-3}(2^2-1)$

$=30\times2^{2n-3}$ …… ㉠

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것이 $a_1=20-k$와 같아야 하므로

$20-k=30\times2^{-1}$ $\therefore k=5$ 답 ③

25 구하는 적립금의 원리합계는

$100(1+0.05)+100(1+0.05)^2+100(1+0.05)^3$

$+\cdots+100(1+0.05)^{10}$

$=\frac{100\times1.05\times(1.05^{10}-1)}{1.05-1}$

$=\frac{105\times(1.63-1)}{0.05}$

$=1323$(만 원) 답 ①

변형유형 집중공략 p.72~73

1-1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면

$a_n=-53+(n-1)d$

S_n이 $n=9$에서만 최소이면 $d>0$이고, $a_9<0$, $a_{10}>0$이어야 하므로

$a_9=-53+8d<0$

$8d<53$ $\therefore d<\frac{53}{8}$ …… ㉠

$a_{10}=-53+9d>0$

$9d<53$ $\therefore d>\frac{53}{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{53}{9}<d<\frac{53}{8}$

$\therefore d=6$ ($\because d$는 정수)

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 6이므로

$S_9=\frac{9\times\{2\times(-53)+(9-1)\times6\}}{2}=-261$ 답 -261

1-2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면

$a_n=73+(n-1)d$

S_n이 $n=10$에서만 최대이면 $d<0$이고, $a_{10}>0$, $a_{11}<0$이어야 하므로

$a_{10}=73+9d>0$

$9d>-73 \quad \therefore d>-\frac{73}{9}$ ····· ㉠

$a_{11}=73+10d<0$

$10d<-73 \quad \therefore d<-\frac{73}{10}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{73}{9}<d<-\frac{73}{10}$

$\therefore d=-8$ ($\because d$는 정수)

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 -8이므로

$S_{10}=\frac{10\times\{2\times73+(10-1)\times(-8)\}}{2}=370$ 답 370

2-1 $a_1=S_1=2\times3=6$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n+1)(n+2)-n(n+1)$

$=(n+1)(n+2-n)$

$=2(n+1)$ $(n\geq2)$

이므로

$a_9=2\times10=20$

$\therefore a_1+a_9=6+20=26$ 답 ④

참고 $a_n=2(n+1)$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=2\times2=4$이므로 $a_1=S_1=6$으로 구한 값과 같지 않다.

따라서 주어진 수열의 일반항은

$a_1=6$, $a_n=2(n+1)$ $(n\geq2)$

이고, 이 수열은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

2-2 $S_n=2^n+c$에서 $S_4=2^4+c=16+c$이고

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2+c$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+c)-(2^{n-1}+c)$

$=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}\times(2-1)=2^{n-1}$

따라서 $a_2=2^{2-1}=2$이므로 $a_1a_2=11-S_4$에서

$(2+c)\times2=11-(16+c)$

$4+2c=-5-c$, $3c=-9$

$\therefore c=-3$ 답 ⑤

서술형 What & How

p.74~77

01 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

세 항 a_3, a_k, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_k는 a_3, a_7의 등차중항이다.

즉 $2a_k=a_3+a_7$이므로

$2\{a_1+3(k-1)\}=(a_1+2\times3)+(a_1+6\times3)$

$2a_1+6(k-1)=2a_1+24$, $6(k-1)=24$

$k-1=4 \quad \therefore k=5$ ····· ❶

또 세 항 a_1, a_k, a_{21}, 즉 a_1, a_5, a_{21}은 이 순서대로 등비수열을 이루므로 a_5는 a_1, a_{21}의 등비중항이다.

즉 $a_5^2=a_1\times a_{21}$이므로

$(a_1+4\times3)^2=a_1(a_1+20\times3)$

$a_1^2+24a_1+144=a_1^2+60a_1$

$36a_1=144 \quad \therefore a_1=4$ ····· ❷

$\therefore a_k=a_5=4+(5-1)\times3=16$ ····· ❸

$\therefore a_1+a_k=4+16=20$ ····· ❹

답 20

참고 첫째항이 a_1, 공차가 $d(d\neq0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_p, a_m, a_q가 이 순서대로 등차수열을 이루면 a_m은 a_p와 a_q의 등차중항이므로

$2a_m=a_p+a_q$

$2\{a_1+(m-1)d\}=\{a_1+(p-1)d\}+\{a_1+(q-1)d\}$

$2(m-1)d=(p-1)d+(q-1)d$

$2(m-1)=(p-1)+(q-1)$ ($\because d\neq0$)

$\therefore 2m=p+q$

따라서 세 항 a_3, a_k, a_7이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때

$2k=3+7$, $2k=10$

$\therefore k=5$

2 공차가 $\frac{1}{3}$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

세 항 a_4, a_k, a_{10}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_k는 a_4, a_{10}의 등차중항이다. 즉 $2a_k=a_4+a_{10}$이므로

$2\left\{a_1+\frac{1}{3}(k-1)\right\}=\left(a_1+3\times\frac{1}{3}\right)+\left(a_1+9\times\frac{1}{3}\right)$

$2a_1+\frac{2}{3}(k-1)=2a_1+4$, $\frac{2}{3}(k-1)=4$

$k-1=6 \quad \therefore k=7$ ····· ❶

또 세 항 a_1, a_k, a_{19}, 즉 a_1, a_7, a_{19}는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 a_7은 a_1, a_{19}의 등비중항이다. 즉 $a_7^2=a_1\times a_{19}$이므로

$\left(a_1+6\times\frac{1}{3}\right)^2=a_1\left(a_1+18\times\frac{1}{3}\right)$

$a_1^2+4a_1+4=a_1^2+6a_1$

$2a_1=4 \quad \therefore a_1=2$ ····· ❷

$\therefore a_k=a_7=2+(7-1)\times\frac{1}{3}=4$ ····· ❸

$\therefore \frac{a_1\times a_k}{4}=\frac{2\times4}{4}=2$ ····· ❹

답 2

채점기준	배점
❶ k의 값 구하기	3
❷ a_1의 값 구하기	2
❸ a_k의 값 구하기	1
❹ $\frac{a_1\times a_k}{4}$의 값 구하기	1

3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{4(2a+3d)}{2}=36$

$\therefore 2a+3d=18$ …… ㉠

$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{12}=\dfrac{8(a_5+a_{12})}{2}$

$=\dfrac{8\{(a+4d)+(a+11d)\}}{2}=168$

$\therefore 2a+15d=42$ …… ㉡ …… ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $d=2$ …… ❷

따라서 $a_n=6+(n-1)\times2=2n+4$이므로

$a_3=2\times3+4=10$, $a_{15}=2\times15+4=34$

$\therefore a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{15}=\dfrac{13(a_3+a_{15})}{2}$

$=\dfrac{13\times(10+34)}{2}$

$=286$ …… ❸

답 286

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_9=\dfrac{9(2a+8d)}{2}=9(a+4d)=27$

$\therefore a+4d=3$ …… ㉠

$a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{18}=\dfrac{9(a_{10}+a_{18})}{2}$

$=\dfrac{9\{(a+9d)+(a+17d)\}}{2}$

$=9(a+13d)=-54$

$\therefore a+13d=-6$ …… ㉡ …… ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=7$, $d=-1$ …… ❷

따라서 $a_n=7+(n-1)\times(-1)=-n+8$이므로

$a_{21}=-21+8=-13$, $a_{30}=-30+8=-22$

$\therefore a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=\dfrac{10\times\{-13+(-22)\}}{2}$

$=-175$ …… ❸

답 -175

채점기준	배점
❶ 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 a, d에 대한 연립방정식 세우기	2
❷ a, d의 값 구하기	1
❸ $a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}$의 값 구하기	2

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 21, 공차가 -3이므로

$a_n=21+(n-1)\times(-3)=-3n+24$ …… ❶

제n항에서 처음으로 음수가 나온다고 하면

$-3n+24<0$, $3n>24$

$\therefore n>8$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지는 0보다 크거나 같고, 제9항부터는 음수이다. …… ❷

이때 $a_8=-3\times8+24=0$, $a_9=-3\times9+24=-3$,

$a_{20}=-3\times20+24=-36$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8)-(a_9+a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20})$

$=\dfrac{8\times(21+0)}{2}-\dfrac{12\times\{-3+(-36)\}}{2}$

$=318$ …… ❸

답 318

6 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1+2d=9$ …… ㉠

$a_{15}=a_1+14d=-15$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_1=13$, $d=-2$

$\therefore a_n=13+(n-1)\times(-2)=-2n+15$ …… ❶

제n항에서 처음으로 음수가 나온다고 하면

$-2n+15<0$, $2n>15$

$\therefore n>7.5$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지는 0보다 크거나 같고, 제8항부터는 음수이다. …… ❷

이때 $a_7=-2\times7+15=1$, $a_8=-2\times8+15=-1$,

$a_{15}=-2\times15+15=-15$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)-(a_8+a_9+a_{10}+\cdots+a_{15})$

$=\dfrac{7\times(13+1)}{2}-\dfrac{8\times\{-1+(-15)\}}{2}$

$=113$ …… ❸

답 113

채점기준	배점
❶ a_n 구하기	2
❷ 수열 $\{a_n\}$의 양수인 항과 음수인 항 설명하기	3
❸ $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|$의 값 구하기	2

7 정사각형 $P_1Q_1R_1S_1$의 한 변의 길이를 x_1이라 하면 $\overline{BQ_1}=2-x_1$이고, 직각삼각형 P_1BQ_1이 $\angle P_1BQ_1=\angle BP_1Q_1=45^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$2-x_1=x_1$ $\therefore x_1=1$ …… ❶

같은 방법으로 정사각형 $P_2Q_2R_2S_2$의 한 변의 길이는

$x_2=\dfrac{1}{2}$ …… ❷

즉 두 정사각형 $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$의 닮음비는

$x_1:x_2=1:\dfrac{1}{2}=2:1$이고, 넓이의 비는 $2^2:1^2=4:1$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1={x_1}^2=1^2=1$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로 …… ❸

$S_n=\dfrac{1\times\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$이고, $S_k>\dfrac{341}{256}$에서

$\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}>\frac{341}{256}$, $1-\left(\frac{1}{4}\right)^k>\frac{1023}{1024}$

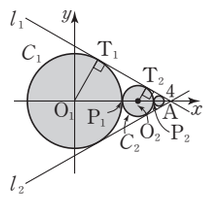
$\left(\frac{1}{4}\right)^k<\frac{1}{1024}$, $\frac{1}{2^{2k}}<\frac{1}{2^{10}}$, $2^{2k}>2^{10}$

$2k>10$ $\therefore k>5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. …… ❹

답 6

8 직선 l_1과 두 원 C_1, C_2의 접점을 각각 T_1, T_2라 하고, 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2, 반지름의 길이를 r_1, r_2라 하면 $\overline{O_1A}=4$, $r_1=2$이고



$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2=2+r_2$

$\overline{O_2A}=\overline{O_1A}-\overline{O_1O_2}=4-(2+r_2)=2-r_2$

이때 $\angle O_1T_1A=\angle O_2T_2A=90^\circ$, $\angle O_1AT_1=\angle O_2AT_2$에서

$\triangle T_1O_1A\backsim\triangle T_2O_2A$ (AA 닮음)이므로

$\overline{O_1T_1}:\overline{O_2T_2}=\overline{O_1A}:\overline{O_2A}$

$2:r_2=4:2-r_2$, $4r_2=2(2-r_2)$

$4r_2=4-2r_2$, $6r_2=4$

$\therefore r_2=\frac{2}{3}$ …… ❶

즉 두 원 C_1, C_2의 닮음비는 $2:\frac{2}{3}=3:1$이므로 넓이의 비는

$3^2:1^2=9:1$이다. …… ❷

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\pi\times2^2=4\pi$, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이므로 …… ❸

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=\frac{4\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^8\right\}$$

$\therefore p=2$, $q=9$, $m=9$

$\therefore p+q+m=2+9+9=20$ …… ❹

답 20

채점기준	배점
❶ 원 C_2의 반지름의 길이 구하기	2
❷ 두 원 C_1, C_2의 넓이의 비 구하기	1
❸ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하고 닮음비와 넓이의 비를 이용하여 공비 구하기	1
❹ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$의 값을 구하고 $p+q+m$의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회 p.78~82

01 주어진 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하고, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=-13$ …… ㉠

$a_8=a+7d=-29$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $d=-4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -1이다. 답 ②

02 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_3+6$에서 $-22+4d=-22+2d+6$

$2d=6$ $\therefore d=3$

$\therefore a_n=-22+(n-1)\times3=3n-25$

이때 $|a_m|=a_m$에서 $a_m\geq0$이므로

$3m-25\geq0$ $\therefore m\geq\frac{25}{3}=8.333\cdots$

따라서 자연수 m의 최솟값은 9이다. 답 ④

03 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라 하면

$2a_n+3b_n=2\{a+(n-1)\times7\}+3\{b+(n-1)\times(-3)\}$

$=(2a+3b)+(n-1)\times5$

따라서 수열 $\{2a_n+3b_n\}$의 공차는 5이다. 답 ①

04 나머지정리에 의하여 다항식 $P(x)=x^2+ax+8$을 $x+2$, $x-1$, $x-2$로 각각 나누었을 때의 나머지는

$P(-2)=4-2a+8=-2a+12$

$P(1)=1+a+8=a+9$

$P(2)=4+2a+8=2a+12$

$-2a+12$, $a+9$, $2a+12$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+9)=(-2a+12)+(2a+12)$

$2a+18=24$, $2a=6$

$\therefore a=3$ 답 ⑤

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{14}=235$에서

$\frac{10(a_5+a_{14})}{2}=235$

$\frac{10\{(a+4\times3)+(a+13\times3)\}}{2}=235$

$(a+12)+(a+39)=47$, $2a=-4$

$\therefore a=-2$

따라서 $a_n=-2+(n-1)\times3=3n-5$이므로

$a_6=3\times6-5=13$ 답 ①

06 조건 ㈎에서

$a_5+a_7=2a_6=0$ $\therefore a_6=0$ …… ㉠

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 음수이므로

$a_5>a_6>a_7$, 즉 $a_5>0>a_7$ …… ㉡

조건 ㈏에서

$|a_5|-0=2$ ($\because$ ㉠)

$|a_5|=2$ $\therefore a_5=2$ ($\because$ ㉡)

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d<0)$라 하면

$a_5=a+4d=2$ …… ㉠

$a_6=a+5d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=10$, $d=-2$

$\therefore\ |a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|$

$=a_1+a_2+a_3+a_4$ $(\because\ a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>0)$

$=\dfrac{4\times\{2\times10+3\times(-2)\}}{2}$

$=28$ 답 ③

07 주어진 등차수열의 첫째항은 1, 제$(m+2)$항은 10, 제$(m+n+3)$항은 13이므로 공차를 d라 하면

$10=1+(m+2-1)\times d=1+d(m+1)$

$\therefore\ d(m+1)=9$ …… ㉠

$13=1+(m+n+3-1)\times d$

$=1+d(m+n+2)$

$=1+d(m+1)+d(n+1)$

$=10+d(n+1)$ $(\because$ ㉠$)$

$\therefore\ d(n+1)=3$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\dfrac{m+1}{n+1}=3$, $m+1=3n+3$

$\therefore\ m-3n=2$ …… ㉢

또 주어진 등차수열의 합이 343이므로

$\dfrac{(m+n+3)\times(1+13)}{2}=343$

$m+n+3=49$

$\therefore\ m+n=46$ …… ㉡

㉢, ㉡을 연립하여 풀면

$m=35$, $n=11$

$\therefore\ m-n=35-11=24$ 답 ①

08 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 조건 (가)에서 $d<0$이고, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지는 양수, 제6항부터는 음수이다.

따라서 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-|a_k|)=\sum_{k=1}^{5}(a_k-|a_k|)+\sum_{k=6}^{10}(a_k-|a_k|)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}(a_k-a_k)+\sum_{k=6}^{10}\{a_k-(-a_k)\}$$

$$=2\sum_{k=6}^{10}a_k=2(a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{10})$$

$$=2\times\frac{5(a_6+a_{10})}{2}=5(a_6+a_{10})$$

$$=5\{(13+5d)+(13+9d)\}$$

$$=5(14d+26)$$

즉 $5(14d+26)=-80$이므로

$14d+26=-16$, $14d=-42$

$\therefore\ d=-3$

따라서 $a_n=13+(n-1)\times(-3)=-3n+16$이므로

$a_{50}=-3\times50+16=-134$ 답 ③

09 $a_1=a_4=a_7=\cdots=1$,

$a_2=a_5=a_8=\cdots=2$,

$a_3=a_6=a_9=\cdots=0$

이고

$b_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

이므로

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{20}b_{20}$

$=(1\times3)+(2\times5)+(0\times7)+\cdots+(0\times37)$

$+(1\times39)+(2\times41)$

$=1\times(3+9+15+\cdots+39)+2\times(5+11+17+\cdots+41)$

$+0\times(7+13+19+\cdots+37)$

$=\dfrac{7\times(3+39)}{2}+2\times\dfrac{7\times(5+41)}{2}=469$ 답 ③

10 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 홀수 번째 항들의 합이 224, 짝수 번째 항들의 합이 192이므로 항의 개수 m은 3 이상의 홀수이다. 따라서 $m=2k+1$ (k는 자연수)이라 하면

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}+a_{2k+1}=224$

$\dfrac{(k+1)(a_1+a_{2k+1})}{2}=224$

$\therefore\ (k+1)(a_1+a_{2k+1})=448$ …… ㉠

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=192$

$\dfrac{k(a_2+a_{2k})}{2}=192$

$\therefore\ k(a_2+a_{2k})=384$ …… ㉡

이때 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_{2k+1}=a_2+a_{2k}$이므로

㉠÷㉡을 하면

$\dfrac{k+1}{k}=\dfrac{7}{6}$, $6k+6=7k$ $\therefore\ k=6$

$\therefore\ m=2\times6+1=13$ 답 ①

참고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이면 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$

따라서 항의 개수 m이 짝수이면 홀수 번째 항들의 합보다 짝수 번째 항들의 합이 커지게 되므로 홀수 번째 항들의 합이 224, 짝수 번째 항들의 합이 192라는 조건을 만족시키지 않는다.

11 $S_n=n^2-10n$에서

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-10\times1=-9$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-10n-\{(n-1)^2-10(n-1)\}$

$=2n-11$ …… ㉠

이때 $a_1=-9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-11$

따라서 $a_1=-9$, $a_3=-5$, $a_5=-1$, …,
$a_{15}=19$이므로 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{15}$는 첫째항이 -9, 끝항이 19, 항의 개수가 8인 등차수열의 합과 같다.

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{15}=\frac{8\times(-9+19)}{2}=40$ 답 ②

12 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=48$ …… ㉠

$a_5=ar^4=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=96$, $r=\frac{1}{2}$ $\therefore a_n=96\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n<1$에서 $96\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1$

$\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{96}$ $\therefore 2^{n-1}>96$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n-1>6$ $\therefore n>7$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제8항이다. 답 ②

13 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>1)$라 하면

$(a_1+a_4):(a_2+a_3)=7:6$에서

$7(a_2+a_3)=6(a_1+a_4)$, $7(ar+ar^2)=6(a+ar^3)$

$7ar(1+r)=6a(1+r)(1-r+r^2)$

$7r=6(1-r+r^2)$ $(\because a>0, r>1)$

$7r=6-6r+6r^2$, $6r^2-13r+6=0$

$(3r-2)(2r-3)=0$ $\therefore r=\frac{3}{2}$ $(\because r>1)$

$\therefore \frac{a_6}{a_4}=\frac{ar^5}{ar^3}=r^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ 답 ③

14 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$\log_2(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10})$

$=\log_2(a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^9)$

$=\log_2 a^{10}r^{1+2+3+\cdots+9}$

$=\log_2 a^{10}r^{45}\left(\because 1+2+3+\cdots+9=\frac{9\times(1+9)}{2}=45\right)$

$\log_2 a_4=5$에서 $a_4=2^5=32$

$\therefore ar^3=32$ …… ㉠

$\log_2 a_6=9$에서 $a_6=2^9=512$

$\therefore ar^5=512$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=16$ $\therefore r=4$ $(\because r>0)$

$r=4$를 ㉠에 대입하면

$a\times 4^3=32$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore \log_2(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10})$

$=\log_2 a^{10}r^{45}=\log_2\left(\frac{1}{2^{10}}\times 4^{45}\right)$

$=\log_2\left(\frac{1}{2^{10}}\times 2^{90}\right)=\log_2 2^{80}=80$ 답 ③

15 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\frac{a_n}{b_n}=c_n$이라 하면 수열 $\{c_n\}$도 등비수열이다.

수열 $\{c_n\}$의 공비를 r라 하면 $c_1=\frac{a_1}{b_1}=1$, $c_4=\frac{a_4}{b_4}=8$이므로

$c_4=c_1\times r^3$에서 $8=1\times r^3$ $\therefore r=2$

따라서 $c_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$이므로 $\frac{a_n}{b_n}>10^6$에서 $c_n>10^6$

$2^{n-1}>10^6$, $\log 2^{n-1}>\log 10^6$

$(n-1)\log 2>6$, $n-1>\frac{6}{\log 2}$

$\therefore n>1+\frac{6}{\log 2}=20.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 21이다. 답 ①

참고 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b라 하고 공비를 각각 s, t라 하면

$c_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{as^{n-1}}{bt^{n-1}}=\frac{a}{b}\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}$

이므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $\frac{a}{b}$, 공비가 $\frac{s}{t}$인 등비수열이다.

16 이차방정식 $x^2-8x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=4$

α, m, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$m=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{8}{2}=4$

α, n, β가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$n^2=\alpha\beta=4$ $\therefore n=2$ $(\because n>0)$

따라서 4, 2를 두 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-4)(x-2)=0$

$\therefore x^2-6x+8=0$ 답 ③

17 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n, 넓이를 a_n이라 하면

원 C_1의 반지름의 길이는 $r_1=4$이므로 원 C_1의 넓이는

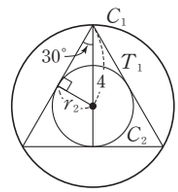
$a_1=\pi r_1^2=\pi\times 4^2=16\pi$

원 C_2의 반지름의 길이는 오른쪽 그림에서

$r_2=r_1\sin 30^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

이므로 원 C_2의 넓이는

$a_2=\pi r_2^2=\pi\times 2^2=4\pi$



따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=16\pi$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$a_n=16\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_n<\frac{1}{200}\pi$에서 $16\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{200}\pi$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}<\frac{1}{200}$ $\therefore 4^{n-3}>200$

이때 $4^3=64$, $4^4=256$이므로 $n-3>3$ $\therefore n>6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 ②

18 $a_n=3^{1-n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

ㄱ. $a_n^{\,2}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{n-1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

즉 수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이다. (참)

ㄴ. $a_n=3^{1-n}$에서 $\log_3 a_n=1-n$

즉 수열 $\{\log_3 a_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 -1인 등차수열이다. (참)

ㄷ. $S_n=\dfrac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$이므로

$$S_n-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

즉 수열 $\left\{S_n-\frac{3}{2}\right\}$은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

19 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 조건 ㈎에서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=\frac{a(r^{15}-1)}{r-1}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 ㈏에서 $\frac{1}{a_n}=b_n$이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비는 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{15}}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15}$$
$$=\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{15}\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$
$$=\frac{\frac{1}{a}\times\frac{1}{r^{15}}\times r(r^{15}-1)}{r-1}$$
$$=\frac{\frac{1}{ar^{14}}(r^{15}-1)}{r-1}=\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면 $a^2r^{14}=\sqrt{3}$

$\therefore a_5\times a_7\times a_9\times a_{11}=ar^4\times ar^6\times ar^8\times ar^{10}$
$=a^4r^{28}=(a^2r^{14})^2$
$=(\sqrt{3})^2=3$ 답 ②

20 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\neq0)$, 공비를 r $(r\neq-1)$라 하면

$$\frac{S_8-S_6}{S_7-S_5}=\frac{a_8+a_7}{a_7+a_6}=\frac{ar^7+ar^6}{ar^6+ar^5}=\frac{ar^6(r+1)}{ar^5(r+1)}=r$$
$$\frac{a_{18}-a_{17}}{a_{17}+a_{16}}=\frac{ar^{17}-ar^{16}}{ar^{16}+ar^{15}}=\frac{ar^{16}(r-1)}{ar^{15}(r+1)}=\frac{r(r-1)}{r+1}$$

이므로 $\dfrac{S_8-S_6}{S_7-S_5}=\dfrac{a_{18}-a_{17}}{a_{17}+a_{16}}+\dfrac{4}{5}$에서

$$r=\frac{r(r-1)}{r+1}+\frac{4}{5}$$
$$5r(r+1)=5r(r-1)+4(r+1)$$
$$5r^2+5r=5r^2-5r+4r+4$$
$$6r=4 \qquad \therefore r=\frac{2}{3}$$

즉 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{2}{3}$이다. 답 ④

21 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{2}n(9n-5) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$S_2-S_1=\frac{1}{2}\times1\times(9-5)$$
$$a_2=2 \qquad \therefore a+d=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$$S_4-S_2=\frac{1}{2}\times2\times(18-5)$$
$$a_4+a_3=13,\ (a+3d)+(a+2d)=13$$
$$\therefore 2a+5d=13 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-1$, $d=3$

따라서 $a_n=-1+(n-1)\times3=3n-4$이므로

$a_8=3\times8-4=20$ 답 ①

22 한 변의 길이가 6인 정사각형의 넓이는 $6^2=36$

n번째 시행에서 새로 색칠하는 정사각형의 넓이의 합을 a_n이라 하면

$$a_1=36\times\frac{1}{9}=4$$
$$a_2=4\times\frac{1}{9}\times8=4\times\frac{8}{9}$$
$$a_3=4\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times8^2=4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$$
$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{8}{9}$인 등비수열이므로 여섯 번째 시행 후 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=\frac{4\times\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^6\right\}}{1-\frac{8}{9}}$$
$$=36\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^6\right\}$$ 답 ④

23 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고, 조건 ㈎에서 $a_5\times a_7<0$이므로

$a_1<a_2<\cdots<a_5<0<a_7<a_8<a_9<\cdots$ ····· ❶

조건 ㈏ $|a_5|+|a_9|=-8+|a_2|+|a_4|$에서

$-a_5+a_9=-8-a_2-a_4$

$\therefore a_2+a_4-a_5+a_9=-8$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$라 하면

$(a_1+d)+(a_1+3d)-(a_1+4d)+(a_1+8d)=-8$

$2a_1+8d=-8$

$\therefore a_1+4d=-4$ …… ❷

$\therefore a_5=a_1+4d=-4$ …… ❸

답 -4

채점기준	배점
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 항의 부호 구하기	2
❷ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차의 관계식 구하기	3
❸ a_5의 값 구하기	1

24 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\neq-1, r\neq0)$라 하면

$a_1=-2$, $a_2=-2r$, $a_3=-2r^2$이므로

$|a_2|+|a_3|+2a_2+a_3=|a_3-4|$에서

$|-2r|+|-2r^2|-4r-2r^2=|-2r^2-4|$

$|2r|+|2r^2|-4r-2r^2=|2r^2+4|$

$2|r|+2r^2-4r-2r^2=2r^2+4$

$2|r|=2r^2+4r+4$

$\therefore |r|=r^2+2r+2$ …… ㉠ …… ❶

(i) $r>0$일 때

㉠에서 $r=r^2+2r+2$, 즉 $r^2+r+2=0$

이때 $r^2+r+2=\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 조건을 만족시키는 실수 r는 존재하지 않는다.

(ii) $r<0$일 때

㉠에서 $-r=r^2+2r+2$

$r^2+3r+2=0$, $(r+1)(r+2)=0$

$\therefore r=-2$ $(\because r\neq-1)$

(i), (ii)에서 $r=-2$ …… ❷

따라서 $a_n=-2\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$이므로

$a_9=(-2)^9=-512$ …… ❸

답 -512

채점기준	배점
❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하고 주어진 조건을 r에 대한 식으로 나타내기	2
❷ 공비 r의 값 구하기	3
❸ a_9의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회 p.83~87

01 $2a^2-3a$, 3, $-a^2+4a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$(2a^2-3a)+(-a^2+4a)=2\times3$

$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+2=-1$ 답 ②

02 9는 첫째항이 -4, 공차가 $\frac{1}{3}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이므로

$9=-4+(n+1)\times\frac{1}{3}$, $\frac{n+1}{3}=13$

$n+1=39$ $\therefore n=38$ 답 ③

03 함수 $y=|x^2-20|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$a_1=-a_4$, $a_2=-a_3$

즉 네 수 $-a_4$, $-a_3$, a_3, a_4 $(0<a_3<a_4)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_3=\frac{-a_3+a_4}{2}$

$2a_3=-a_3+a_4$ $\therefore 3a_3=a_4$ …… ㉠

점 (a_3, k)는 함수 $y=-x^2+20$의 그래프 위의 점이므로

$k=-a_3^2+20$ …… ㉡

점 (a_4, k)는 함수 $y=x^2-20$의 그래프 위의 점이므로

$k=a_4^2-20$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-a_3^2+20=a_4^2-20$

$\therefore a_3^2+a_4^2=40$ …… ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면

$a_3^2+(3a_3)^2=40$, $10a_3^2=40$

$a_3^2=4$ $\therefore a_3=2$ $(\because a_3>0)$

$a_3=2$를 ㉠에 대입하면

$a_4=3\times2=6$

$\therefore a_3+a_4=2+6=8$ 답 ③

04 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=32$ …… ㉠

$a_4=a+3d=26$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=35$, $d=-3$

$\therefore a_n=35+(n-1)\times(-3)=-3n+38$

$a_n<0$에서 $-3n+38<0$, $-3n<-38$

$\therefore n>\frac{38}{3}=12.\times\times\times$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 제13항부터 음수이므로 S_n은 $n=12$에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore k=12$, $M=S_{12}=\frac{12\times\{2\times35+11\times(-3)\}}{2}=222$

$\therefore k+M=12+222=234$ 답 ⑤

05 조건 ㈎에서 $a_{11}=0$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a+10d=0$ $\therefore a=-10d$ …… ㉠

조건 ㈏에서 $S_{20}+S_{18}-74=0$이므로

$\frac{20(2a+19d)}{2}+\frac{18(2a+17d)}{2}-74=0$

$20a+190d+18a+153d-74=0$

$38a+343d-74=0$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$-380d+343d-74=0,\ -37d-74=0$

$\therefore d=-2$

$d=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=20$

$\therefore a_2=20+(-2)=18$ 답 ②

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 2000이므로 공차를 d라 하면

$\frac{20(2a_1+19d)}{2}=2000,\ 2a_1+19d=200$

$2a_1=200-19d \quad \therefore a_1=100-\frac{19}{2}d$

이때 d는 자연수이므로 $d\geq 1$ ····· ㉠

a_1도 자연수이므로 $100-\frac{19}{2}d\geq 1$

$-\frac{19}{2}d\geq -99 \quad \therefore d\leq \frac{198}{19}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\leq d\leq \frac{198}{19}$

이때 a_1이 자연수이려면 자연수 d는 짝수이어야 하므로

$d=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$

a_1이 최대이려면 d는 최소이어야 하므로 a_1의 최댓값은

$d=2$일 때

$a_1=100-\frac{19}{2}\times 2=81 \quad \therefore M=81$

a_1이 최소이려면 d는 최대이어야 하므로 a_1의 최솟값은

$d=10$일 때

$a_1=100-\frac{19}{2}\times 10=5 \quad \therefore m=5$

$\therefore M-m=81-5=76$ 답 ①

07 $a_3=(3^3$의 일의 자리의 숫자$)=7$

$a_{27}=(27^{27}$의 일의 자리의 숫자$)$

$=(7^{27}$의 일의 자리의 숫자$)$

이때

7^1의 일의 자리의 숫자는 7

7^2의 일의 자리의 숫자는 9

7^3의 일의 자리의 숫자는 3

7^4의 일의 자리의 숫자는 1

7^5의 일의 자리의 숫자는 7

⋮

이므로 7^n (n은 자연수)의 일의 자리의 숫자로는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $27=4\times 6+3$이므로 7^{27}의 일의 자리의 숫자는 3이다.

$\therefore a_{27}=3$

$\therefore a_3+a_{27}=7+3=10$ 답 ②

08 $S_n=2n^2-kn,\ T_n=n^2+16n$이라 하면

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-kn-\{2(n-1)^2-k(n-1)\}$

$=4n-k-2$

$\therefore a_8=4\times 8-k-2=30-k$

$n\geq 2$일 때

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=n^2+16n-\{(n-1)^2+16(n-1)\}$

$=2n+15$

$\therefore b_8=2\times 8+15=31$

이때 $a_8=b_8$이므로

$30-k=31 \quad \therefore k=-1$ 답 ②

다른풀이 $S_n=2n^2-kn,\ T_n=n^2+16n$이라 하면

$a_8=S_8-S_7=2\times 8^2-8k-(2\times 7^2-7k)=30-k$

$b_8=T_8-T_7=8^2+16\times 8-(7^2+16\times 7)=31$

이때 $a_8=b_8$이므로

$30-k=31 \quad \therefore k=-1$

09 $a_1=1$이므로

$a_1=S_1=1+p+q=1 \quad \therefore p+q=0$ ····· ㉠

$a_5=7$이므로

$a_5=S_5-S_4=(25+5p+q)-(16+4p+q)$

$=9+p=7$

$\therefore p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2+q=0 \quad \therefore q=2$

$\therefore S_n=n^2-2n+2$

따라서 $S_4=4^2-2\times 4+2=10$이므로

$p-q+S_4=-2-2+10=6$ 답 ①

10 (i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=-2\times 1^2+24\times 1+1=23$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-2n^2+24n+1)-\{-2(n-1)^2+24(n-1)+1\}$

$=-4n+26$

ㄱ. $a_5=-4\times 5+26=6$이므로

$a_1+a_5=23+6=29$ (참)

ㄴ. $a_{20}=-4\times 20+26=-54$ (참)

ㄷ. $n\geq 2$일 때, $a_n<0$에서

$-4n+26<0,\ 4n>26 \quad \therefore n>\frac{13}{2}$

즉 자연수 n의 최솟값은 7이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

11 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=4n^2-3n$ ····· ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=4-3=1$

㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_1+a_3=16-6=10$

$\therefore a_3=10-1=9$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_3=a_1+2d$에서

$9=1+2d$, $2d=8$ $\therefore d=4$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{11}-a_{12}+a_{13}$

$=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{13}-a_{12})$

$=a_1+6\times d=1+6\times 4=25$ 답 ③

12 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+\frac{4}{9}|a_3|=0$에서 $a_1+a_1r+\frac{4}{9}|a_1r^2|=0$

$a_1+a_1r-\frac{4}{9}a_1r^2=0$ ($\because a_1<0$), $1+r-\frac{4}{9}r^2=0$ ($\because a_1\neq 0$)

$4r^2-9r-9=0$, $(4r+3)(r-3)=0$

$\therefore r=-\frac{3}{4}$ 또는 $r=3$ ····· ㉠

한편 $a_4a_6=\frac{8}{3}a_{10}$에서 $a_1r^3\times a_1r^5=\frac{8}{3}a_1r^9$

$\therefore a_1=\frac{8}{3}r$ ($\because a_1\neq 0$, $r\neq 0$) ····· ㉡

이때 $a_1<0$이므로 ㉡에서 $r<0$

따라서 ㉠에서 $r=-\frac{3}{4}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$a_1=\frac{8}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-2$

$\therefore a_n=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore a_3=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{9}{8}$ 답 ⑤

13 조건 (가)에서 $a_1=3$, $b_1=3$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r ($r\neq 1$)라 하면 일반항은 각각

$a_n=3+(n-1)d$, $b_n=3\times r^{n-1}$

조건 (나)에서 $a_2=b_2$이므로

$3+d=3r$ $\therefore d=3r-3$ ····· ㉠

또 $a_4=b_4$에서

$3+3d=3r^3$ $\therefore 1+d=r^3$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1+3r-3=r^3$, $r^3-3r+2=0$, $(r-1)^2(r+2)=0$

$\therefore r=-2$ ($\because r\neq 1$)

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$d=3\times(-2)-3=-9$

따라서 $a_n=-9n+12$, $b_n=3\times(-2)^{n-1}$이므로

$a_7=-9\times 7+12=-51$, $b_7=3\times(-2)^6=192$

$\therefore a_7+b_7=-51+192=141$ 답 ④

14 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 300, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=300\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$T_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$의 값이 최대가 되려면 $a_n>1$, $a_{n+1}<1$이어야 하므로 $a_n=300\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>1$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>\frac{1}{300}$, $2^{n-1}<300$ $\therefore 2^n<600$ ····· ㉠

또 $a_{n+1}=300\times\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{300}$ $\therefore 2^n>300$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $300<2^n<600$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 $n=9$ 답 ④

15 등비수열 2, a_1, a_2, a_3, …, a_{10}, 40에서 40은 첫째항이 2인 등비수열의 12번째 항이므로 공비를 r라 하면

$40=2r^{11}$ $\therefore r^{11}=20$

또 $2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}+40=\frac{2(r^{12}-1)}{r-1}$

한편 수열 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$, …, $\frac{1}{a_{10}}$, $\frac{1}{40}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{40}$

$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{12}\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r^{12}-1}{2r^{11}(r-1)}$

이때

$2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}+40$

$=k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{40}\right)$

이므로

$\frac{2(r^{12}-1)}{r-1}=k\times\frac{r^{12}-1}{2r^{11}(r-1)}$, $2=\frac{k}{2r^{11}}$

$\therefore k=4r^{11}=4\times 20=80$ 답 ③

16 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이는

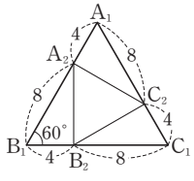
$a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2=36\sqrt{3}$

삼각형 $A_2B_1B_2$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{A_2B_2}^2=8^2+4^2-2\times 8\times 4\times\cos 60^\circ$

$=48$

$\therefore \overline{A_2B_2}=4\sqrt{3}$



따라서 두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비가

$12:4\sqrt{3}=3:\sqrt{3}$이므로 넓이의 비는 $9:3=3:1$이다.

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $36\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=\frac{36\sqrt{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

$=54\sqrt{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$

따라서 $p=54$, $q=20$이므로

$p+q=54+20=74$ 답 ④

17 12, $x-4$, $y-3$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x-4)=12+(y-3)$

$2x-8=y+9$ $\therefore y=2x-17$ …… ㉠

$10-3x$, $y+9$, 4는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(y+9)^2=4\times(10-3x)$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$(2x-17+9)^2=4(10-3x)$, $(2x-8)^2=4(10-3x)$

$(x-4)^2=10-3x$

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$x=2$일 때, ㉠에서 $y=-13$이므로

$xy=-26$

$x=3$일 때, ㉠에서 $y=-11$이므로

$xy=-33$

따라서 xy의 최댓값은 -26이다. 답 ④

18 $P(x)=x^9-x^8+x^7-x^6+\cdots+x-1$이라 하면 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2)=2^9-2^8+2^7-2^6+\cdots+2-1$

이것은 첫째항이 2^9이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$P(2)=2^9-2^8+2^7-2^6+\cdots+2-1$

$=\dfrac{2^9\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=341$ 답 ③

19 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=\dfrac{a_1(1-r^m)}{1-r}=20$

이고

$a_{2m+1}+a_{2m+2}+a_{2m+3}+\cdots+a_{3m}$

$=a_1r^{2m}+a_1r^{2m+1}+a_1r^{2m+2}+\cdots+a_1r^{3m-1}$

$=\dfrac{a_1r^{2m}(1-r^m)}{1-r}=\dfrac{a_1(1-r^m)}{1-r}\times r^{2m}$

$=20r^{2m}=80$

$r^{2m}=4$, $(r^m)^2=4$

$\therefore r^m=2$ $(\because r>0)$

$\therefore a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots+a_{2m}$

$=a_1r^m+a_1r^{m+1}+a_1r^{m+2}+\cdots+a_1r^{2m-1}$

$=\dfrac{a_1r^m(1-r^m)}{1-r}=\dfrac{a_1(1-r^m)}{1-r}\times r^m$

$=20\times2=40$ 답 ①

참고 $r=1$이면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=ma=20$

$a_{2m+1}+a_{2m+2}+a_{2m+3}+\cdots+a_{3m}=ma=80$

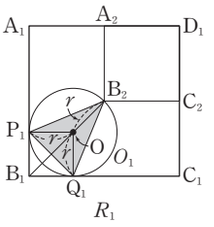
즉 $20=80$이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

20 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이가 2이므로 $\overline{B_1D_1}=2\sqrt{2}$

그림 R_1에서 원 O_1의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하면

□$P_1B_1Q_1O$는 정사각형이므로

$\overline{OB_1}=\sqrt{2}r$



이때 $\overline{B_1B_2}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1D_1}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$이고

$\overline{B_1B_2}=\overline{B_1O}+\overline{OB_2}=\sqrt{2}r+r$

이므로

$\sqrt{2}r+r=\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}+1)r=\sqrt{2}$

$\therefore r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$

또한 $\triangle OP_1B_2\equiv\triangle OQ_1B_2$ (SAS 합동)이므로 그림 R_1에서 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle B_2P_1Q_1=\triangle OP_1Q_1+2\times\triangle OP_1B_2$

$=\dfrac{1}{2}r^2+2\times\dfrac{1}{2}r^2\sin135^\circ$

$=\dfrac{1}{2}r^2(1+2\sin45^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2\left(1+2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1$

이때 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_1$의 닮음비는 2 : 1이므로 넓이의 비는 $2^2:1^2$, 즉 4 : 1이다.

따라서 그림 R_5에 색칠된 부분의 넓이는 첫째항이 $\sqrt{2}-1$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합과 같으므로

$\dfrac{(\sqrt{2}-1)\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{341(\sqrt{2}-1)}{256}$ 답 ①

21 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=62$ …… ㉠

$a_{15}=a+14d=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=70$, $d=-4$

$\therefore S_n=\dfrac{n\{2\times70+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=n(-2n+72)=-2n^2+72n$

$S_n>198$에서 $-2n^2+72n>198$

$2n^2-72n+198<0$, $n^2-36n+99<0$

$(n-3)(n-33)<0$ $\therefore 3<n<33$

따라서 자연수 n의 최댓값은 32이다. 답 ③

22 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\neq1)$라 하면

$S_m=\dfrac{2(r^m-1)}{r-1}=30$ …… ㉠

$S_{2m}=\dfrac{2(r^{2m}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{2(r^m-1)(r^m+1)}{r-1}=510$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^m+1=17$ $\therefore r^m=16$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{2\times(16-1)}{r-1}=30$, $\frac{1}{r-1}=1$, $r-1=1$ $\therefore r=2$

$\therefore a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

또 $r=2$를 ㉢에 대입하면

$2^m=16$ $\therefore m=4$

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=a_1+a_3+a_5+a_7$

$=2+2\times2^2+2\times2^4+2\times2^6$

$=\frac{2\times(4^4-1)}{4-1}=170$ 답 ⑤

23 조건 (가)에서 $S_6=S_7$이므로 $a_7=0$ …… ❶

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=a+6d=0$ …… ㉠ …… ❷

또 조건 (나)에서 $S_{14}=\frac{14(2a+13d)}{2}=63$

$\therefore 2a+13d=9$ …… ㉡ …… ❸

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-54$, $d=9$

따라서 $a_n=-54+(n-1)\times9=9n-63$이므로

$a_8=9\times8-63=9$ …… ❹

답 9

채점기준	배점
❶ 조건 (가)에서 $a_7=0$임을 알아내기	2
❷ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, $a_7=0$을 a, d에 대한 식으로 나타내기	1
❸ 조건 (나)를 a, d에 대한 식으로 나타내기	1
❹ a, d의 값과 a_8의 값 구하기	1

24 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합이 $\frac{61}{3}$, 곱이 243이므로 공비를 r $(r\neq0, r\neq1)$라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{a_1(r^5-1)}{r-1}=\frac{61}{3}$

$\therefore \frac{r^5-1}{r-1}=\frac{61}{3a_1}$ …… ㉠ …… ❶

$a_1a_2a_3a_4a_5=a_1\times a_1r\times a_1r^2\times a_1r^3\times a_1r^4$

$=a_1{}^5r^{1+2+3+4}=a_1{}^5r^{10}=243$

$(a_1r^2)^5=243$ $\therefore a_1r^2=3$ …… ㉡ …… ❷

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=\frac{\frac{1}{a_1}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{r}}$

$=\frac{\frac{1}{a_1}\times r\times\left(\frac{1}{r}\right)^5(r^5-1)}{r-1}$

$=\frac{1}{a_1}\times r\times\left(\frac{1}{r}\right)^5\times\frac{61}{3a_1}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{a_1r^4}\times\frac{61}{3a_1}=\frac{61}{3a_1{}^2r^4}$

$=\frac{61}{3\times(a_1r^2)^2}=\frac{61}{3\times3^2}$ ($\because$ ㉡)

$=\frac{61}{27}$ …… ❸

따라서 $p=27$, $q=61$이므로

$p+q=27+61=88$ …… ❹

답 88

채점기준	배점
❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하고 첫째항부터 제5항까지의 합을 이용하여 a_1, r에 대한 식 세우기	1
❷ 첫째항부터 제5항까지의 곱을 이용하여 a_1, r에 대한 식 세우기	1
❸ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$의 값 계산하기	3
❹ $p+q$의 값 구하기	1

참고 $a_1=0$ 또는 $r=0$ 또는 $r=1$이면 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합이 $\frac{61}{3}$, 곱이 243이라는 조건을 만족시키지 않는다.

수능형 기출문제 & 변형문제 p.88~92

1 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루면 α는 1과 β의 등차중항이므로

$2\alpha=\beta+1$ …… ㉠

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서

$(x-4)\{x-(n-4)\}=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=n-4$

(i) $\alpha=4$, $\beta=n-4$인 경우

$\alpha<\beta$에서 $4<n-4$ $\therefore n>8$

㉠에서 $2\times4=(n-4)+1$ $\therefore n=11$

(ii) $\alpha=n-4$, $\beta=4$인 경우

$\alpha<\beta$에서 $n-4<4$ $\therefore n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1$, $n-4=\frac{5}{2}$

$\therefore n=\frac{13}{2}$

그런데 n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=11$ 답 ③

2 α, β는 이차방정식 $x^2-kx+125=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=125$ …… ㉠

α, $\beta-\alpha$, β가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta=125$ ($\because$ ㉠)

$(\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2+4\alpha\beta$

$=125+4\times125=625$

$\therefore k=\alpha+\beta=25$ ($\because k>0$) 답 ⑤

3 $a_1a_2<0$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 음수이다.
따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r<0)$라 하면
$a_6=a_1r^5=16$ …… ㉠
$2a_8-3a_7=2a_1r^7-3a_1r^6=a_1r^5(2r^2-3r)=32$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$16(2r^2-3r)=32$
$2r^2-3r=2$, $2r^2-3r-2=0$
$(2r+1)(r-2)=0$ $\therefore r=-\frac{1}{2}$ $(\because r<0)$
$r=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면
$a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5=16$ $\therefore a_1=-512$
따라서 $a_n=-512\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로
$a_9=-512\times\left(-\frac{1}{2}\right)^8=-2$
$a_{11}=-512\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}=-\frac{1}{2}$
$\therefore a_9+a_{11}=-2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ 답 ①

다른풀이 $a_6=16$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_8=a_6\times r^2=16r^2$, $a_7=a_6\times r=16r$
따라서 $2a_8-3a_7=32$에서
$2\times16r^2-3\times16r=32$, $2r^2-3r=2$
$2r^2-3r-2=0$, $(2r+1)(r-2)=0$
$\therefore r=-\frac{1}{2}$ $(\because a_1a_2<0$에서 $r<0)$
$\therefore a_9+a_{11}=a_6\times r^3+a_6\times r^5$
$=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5$
$=-2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

4 $a_1a_2<0$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 음수이다.
따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r<0)$라 하면
$a_5=a_1r^4=32$ …… ㉠
$6a_7-a_6=6a_1r^6-a_1r^5=a_1r^4(6r^2-r)=64$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$32(6r^2-r)=64$
$6r^2-r=2$, $6r^2-r-2=0$
$(2r+1)(3r-2)=0$ $\therefore r=-\frac{1}{2}$ $(\because r<0)$
$r=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면
$a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=32$ $\therefore a_1=512$
따라서 $a_n=512\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로
$a_9=512\times\left(-\frac{1}{2}\right)^8=2$, $a_{12}=512\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}=-\frac{1}{4}$
$\therefore a_9+a_{12}=2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$ 답 ④

다른풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_5=32$이므로
$a_7=a_5\times r^2=32r^2$, $a_6=a_5\times r=32r$
$6a_7-a_6=64$이므로
$6\times32r^2-32r=64$, $6r^2-r-2=0$
$(2r+1)(3r-2)=0$
$a_1a_2<0$에서 $r<0$이므로 $r=-\frac{1}{2}$
$\therefore a_9+a_{12}=a_5\times r^4+a_5\times r^7$
$=32\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4+32\times\left(-\frac{1}{2}\right)^7$
$=2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$

5 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$S_{n+3}-S_n=13\times3^{n-1}$에서
$a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}=13\times3^{n-1}$
$ar^{n+2}+ar^{n+1}+ar^n=13\times3^{n-1}$
$ar^n(r^2+r+1)=13\times3^{n-1}$
$\therefore ar(r^2+r+1)\times r^{n-1}=13\times3^{n-1}$
즉 $r=3$, $ar(r^2+r+1)=13$이므로
$ar(r^2+r+1)=3a\times(9+3+1)=39a=13$
$\therefore a=\frac{1}{3}$
따라서 $a_n=\frac{1}{3}\times3^{n-1}=3^{n-2}$이므로
$a_4=3^2=9$ 답 9

6 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면
$S_{2n+4}-S_{2n}=15\times4^{n+2}$에서
$a_{2n+4}+a_{2n+3}+a_{2n+2}+a_{2n+1}=15\times4^{n+2}$
$ar^{2n+3}+ar^{2n+2}+ar^{2n+1}+ar^{2n}=15\times4^{n+2}$
$ar^{2n}(r^3+r^2+r+1)=15\times16\times2^{2n}$
$\therefore a(r^3+r^2+r+1)\times r^{2n}=15\times16\times2^{2n}$
즉 $r=2$ $(\because r>0)$, $a(r^3+r^2+r+1)=15\times16$이므로
$a\times(8+4+2+1)=15\times16$
$\therefore a=16$
따라서 $a_n=16\times2^{n-1}=2^{n+3}$이므로
$a_6=2^9=512$ 답 512

7 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
조건 ㈎에서 $S_7=S_8$이므로
$S_8-S_7=0$ $\therefore a_8=0$
$a_8=a_1+7d=0$
$\therefore a_1=-7d$ …… ㉠
$S_8<S_9$이므로
$S_9-S_8>0$, $a_9>0$
$a_8+d>0$ $\therefore d>0$
따라서 ㉠에서 $d>0$, $a_1<0$

$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_7<a_8=0<a_9<a_{10}<\cdots$

이므로 $m>8$인 자연수 m에 대하여

$S_{2m}>S_m$

따라서 $|S_m|=|S_{2m}|=162$에서

$-S_m=S_{2m}=162$

$-S_m=S_{2m}$에서

$$-\frac{m\{2a_1+(m-1)d\}}{2}=\frac{2m\{2a_1+(2m-1)d\}}{2}$$

$-2a_1-(m-1)d=4a_1+2(2m-1)d$

$14d-(m-1)d=-28d+2(2m-1)d$ ($\because$ ㉠)

$14-(m-1)=-28+2(2m-1)$

$14-m+1=-28+4m-2$

$5m=45$ $\therefore m=9$

따라서 $-S_9=162$이므로

$$-\frac{9(2a_1+8d)}{2}=162,\ a_1+4d=-18$$

$-7d+4d=-18$ ($\because$ ㉠)

$-3d=-18$ $\therefore d=6$

$d=6$을 ㉠에 대입하면

$a_1=-7\times6=-42$

따라서 $a_n=-42+(n-1)\times6=6n-48$이므로

$a_{13}=6\times13-48=30$ 답 30

8 조건 ㈎에서 $S_{12}=S_{13}$

$S_{13}-S_{12}=0$ $\therefore a_{13}=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{13}=a_1+12d=0$

$\therefore a_1=-12d$ …… ㉠

또 조건 ㈎에서 $S_{13}<S_{14}$이므로

$S_{14}-S_{13}>0,\ a_{14}>0$

$a_{13}+d>0$ $\therefore d>0$

따라서 ㉠에서 $a_1<0$

$a_1<a_2<a_2<\cdots<a_{12}<a_{13}=0<a_{14}<a_{15}\cdots$

이므로 $m>13$인 자연수 m에 대하여

$S_{2m}>S_m$

따라서 $|S_m|=|S_{2m}|=450$에서

$-S_m=S_{2m}=450$

$-S_m=S_{2m}$에서

$$-\frac{m\{2a_1+(m-1)d\}}{2}=\frac{2m\{2a_1+(2m-1)d\}}{2}$$

$-2a_1-(m-1)d=4a_1+2(2m-1)d$

$24d-(m-1)d=-48d+2(2m-1)d$ ($\because$ ㉠)

$24-(m-1)=-48+2(2m-1)$

$24-m+1=-48+4m-2$

$5m=75$ $\therefore m=15$

따라서 $-S_{15}=450$이므로

$$-\frac{15(2a_1+14d)}{2}=450$$

$-15\times(a_1+7d)=450,\ a_1+7d=-30$

$-12d+7d=-30$ ($\because$ ㉠)

$-5d=-30$ $\therefore d=6$

$d=6$을 ㉠에 대입하면

$a_1=-12\times6=-72$

따라서 $a_n=-72+(n-1)\times6=6n-78$이므로

$a_{17}=6\times17-78=24$ 답 24

9 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 조건 ㈏에서

$$S_8=\frac{8\times(2a+7d)}{2}=4(2a+7d)=\frac{68}{3}$$

$$2a+7d=\frac{17}{3},\ 2a=\frac{17}{3}-7d$$

$$\therefore a=\frac{17}{6}-\frac{7}{2}d \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_5=a+4d=\left(\frac{17}{6}-\frac{7}{2}d\right)+4d=\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}$이 자연수이고

$0<d<1$에서 $0<\frac{1}{2}d<\frac{1}{2}$, 즉 $\frac{17}{6}<\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}<\frac{10}{3}$이므로

$$\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}=3,\ \frac{1}{2}d=\frac{1}{6}$$

$$\therefore d=\frac{1}{3}$$

따라서 ㉠에서 $a=\frac{17}{6}-\frac{7}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$이므로

$a_{16}=\frac{5}{3}+15\times\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$ 답 ⑤

10 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 조건 ㈏에서

$$S_7=\frac{7(2a+6d)}{2}=7(a+3d)=\frac{35}{2}$$

$$a+3d=\frac{5}{2}$$

$$\therefore a=\frac{5}{2}-3d \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_6=a+5d=\left(\frac{5}{2}-3d\right)+5d=2d+\frac{5}{2}$가 자연수이고

$0<d<\frac{1}{2}$에서 $0<2d<1$, 즉 $\frac{5}{2}<2d+\frac{5}{2}<\frac{7}{2}$이므로

$$2d+\frac{5}{2}=3,\ 2d=\frac{1}{2} \quad \therefore d=\frac{1}{4}$$

따라서 ㉠에서 $a=\frac{5}{2}-3\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$이므로

$a_{14}=\frac{7}{4}+13\times\frac{1}{4}=5$ 답 ②

2 수열의 합

교과서 예제 p.95

01 (3) 수열 4, 7, 10, …, 31을 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$

$31=3n+1$에서 $3n=30$, 즉 $n=10$이므로 31은 수열 $\{a_n\}$의 제10항이다.

$\therefore 4+7+10+\cdots+31=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(3k+1)$

(4) 수열 $-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \cdots, \frac{64}{729}$를 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $-\frac{2}{3}$, 공비가 $-\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$\frac{64}{729}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$에서 $n=6$이므로 $\frac{64}{729}$는 수열 $\{a_n\}$의 제6항이다.

$\therefore -\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{16}{81}-\frac{32}{243}+\frac{64}{729}$

$=\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$

답 (1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$

(3) $\sum_{k=1}^{10}(3k+1)$ (4) $\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$

02 답 (1) $1+4+7+10+13$

(2) $3+3+3+3+3$

(3) $2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+(n+1)(n+2)$

(4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$

03 (1) $\sum_{k=1}^{20}(2a_k-3b_k)=2\sum_{k=1}^{20}a_k-3\sum_{k=1}^{20}b_k$

$=2\times8-3\times5=1$

(2) $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}a_k-\frac{1}{5}b_k\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}a_k-\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{20}b_k$

$=\frac{1}{2}\times8-\frac{1}{5}\times5=3$

답 (1) 1 (2) 3

04 $\sum_{k=1}^{15}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}b_k=7$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{15}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k=3$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\sum_{k=1}^{15}a_k=10$ $\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=5$

이것을 ㉠에 대입하면

$5+\sum_{k=1}^{15}b_k=7$ $\therefore \sum_{k=1}^{15}b_k=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}(a_k-3b_k+4)=\sum_{k=1}^{15}a_k-3\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}4$

$=5-3\times2+4\times15$

$=59$

답 59

05 (1) $\sum_{k=1}^{5}(k-1)(k^2+k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}(k^3-1)=\sum_{k=1}^{5}k^3-\sum_{k=1}^{5}1$

$=\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2-1\times5$

$=220$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k+1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+2k+1)-(k^2-2k+1)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}4k$

$=4\times\frac{10\times11}{2}=220$

(3) $\sum_{k=1}^{5}(3k+1)(k-2)$

$=\sum_{k=1}^{5}(3k^2-5k-2)$

$=3\sum_{k=1}^{5}k^2-5\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}2$

$=3\times\frac{5\times6\times11}{6}-5\times\frac{5\times6}{2}-2\times5$

$=80$

답 (1) 220 (2) 220 (3) 80

06 (1) $2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2$

$=\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{9}(k^2+2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}k^2+2\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}1$

$=\frac{9\times10\times19}{6}+2\times\frac{9\times10}{2}+1\times9$

$=384$

(2) $1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+8\times10$

$=\sum_{k=1}^{8}k(k+2)=\sum_{k=1}^{8}(k^2+2k)$

$=\sum_{k=1}^{8}k^2+2\sum_{k=1}^{8}k$

$=\frac{8\times9\times17}{6}+2\times\frac{8\times9}{2}$

$=276$

답 (1) 384 (2) 276

07 (1) $\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}=\frac{n}{3n+9}$

(2) $\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{4\times6}+\frac{2}{6\times8}+\cdots+\frac{2}{2n(2n+2)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k(2k+2)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}=\frac{n}{2n+2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$

답 (1) $\frac{n}{3n+9}$ (2) $\frac{n}{2n+2}$ (3) $\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$

08 (1) $\sum_{k=1}^{9}\frac{2}{k(k+2)}$

$=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{72}{55}$

(2) $\sum_{k=1}^{40}\frac{2}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{40}\frac{2(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$

$=\sqrt{81}-\sqrt{1}=8$

답 (1) $\frac{72}{55}$ (2) 8

기출 Best | 1회

p.96~98

01 ① $\sum_{k=1}^{n}c=cn\neq c$

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$,

$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}$

이므로 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\neq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k\neq cn\sum_{k=1}^{n}a_k$

④ $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$,

$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$

이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\neq\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$

$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

02 $\sum_{k=1}^{n}a_k=5$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=-2$이므로

$\sum_{k=1}^{n}(3a_k+7b_k)=3\sum_{k=1}^{n}a_k+7\sum_{k=1}^{n}b_k$

$=3\times5+7\times(-2)=1$ 답 ③

03 $\sum_{k=1}^{9}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{9}(4a_k{}^2-4a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{9}a_k{}^2-4\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=1}^{9}1$

$=4\times14-4\times(-4)+1\times9$

$=81$ 답 ③

04 $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=1$, $a_5=0$, $a_6=0$, $a_7=1$, …

이므로 수열 $\{a_n\}$은 1, 0, 0이 이 순서대로 반복되는 수열이다.

이때 $201=3\times67$이므로

$\sum_{k=1}^{201}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{201}$

$=\underbrace{(1+0+0)+\cdots+(1+0+0)}_{67개}$

$=(1+0+0)\times67=67$ 답 ③

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4+a_9=4a_5$에서

$(a+3d)+(a+8d)=4(a+4d)$

$2a+11d=4a+16d$

$\therefore 2a+5d=0$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{10} a_k=-40$에서

$\frac{10(2a+9d)}{2}=-40$

$\therefore 2a+9d=-8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5,\ d=-2$

따라서 $a_n=5+(n-1)\times(-2)=-2n+7$이므로

$a_8=-16+7=-9$ 답 ①

06 $\sum_{k=1}^{12}\frac{4^k+6^k}{5^k}=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{4^k}{5^k}+\frac{6^k}{5^k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^k+\left(\frac{6}{5}\right)^k\right\}$

$=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^k+\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{6}{5}\right)^k$

$=\frac{\frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{12}\right\}}{1-\frac{4}{5}}+\frac{\frac{6}{5}\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^{12}-1\right\}}{\frac{6}{5}-1}$

$=4\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{12}\right\}+6\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^{12}-1\right\}$

$=4-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^{12}+6\times\left(\frac{6}{5}\right)^{12}-6$

$=-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^{12}+6\times\left(\frac{6}{5}\right)^{12}-2$

따라서 $a=-4,\ b=6,\ c=-2$이므로

$a-b-c=-4-6-(-2)=-8$ 답 ③

07 $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^3$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^3-(k-1)^3\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^3+3k^2+3k+1)-(k^3-3k^2+3k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(6k^2+2)=6\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}2$

$=6\times\frac{10\times11\times21}{6}+2\times10=2330$ 답 ③

08 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times1=n+2$

이때

$(2a_k+3)(a_k-4)=\{2(k+2)+3\}(k+2-4)$

$=(2k+7)(k-2)$

$=2k^2+3k-14$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)(a_k-4)$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+3k-14)=2\sum_{k=1}^{10}k^2+3\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}14$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}-14\times10$

$=795$ 답 ②

09 $2\times1+3\times3+4\times5+\cdots+10\times17$

$=\sum_{k=1}^{9}(k+1)(2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{9}(2k^2+k-1)=2\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}1$

$=2\times\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}-9=606$ 답 ①

10 수열 1, 1+2, 1+2+3, ..., 1+2+3+…+10의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

$\therefore 1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+10)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)=220$ 답 ①

11 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-1=0$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2$ ····· ㉠

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-2$

따라서 $a_{4k+1}=2(4k+1)-2=8k$이므로

$\sum_{k=1}^{5}ka_{4k+1}=\sum_{k=1}^{5}8k^2=8\times\frac{5\times6\times11}{6}=440$ 답 ④

12 $\sum_{i=1}^{10}\left\{\sum_{j=1}^{10}(2i-j)\right\}=\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{10}2i-\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\sum_{i=1}^{10}\left(2i\times10-\frac{10\times11}{2}\right)$

$=\sum_{i=1}^{10}(20i-55)$

$=20\times\frac{10\times11}{2}-55\times10$

$=550$ 답 ②

13 수열 $\frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \frac{1}{7^2-1}, \cdots, \frac{1}{49^2-1}$의 제$k$항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\frac{1}{4k^2+4k}$$
$$=\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$\therefore \frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{49^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{24}a_k=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{6}{25}$$ 답 ②

14 α_n, β_n은 이차방정식 $x^2+11x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=-11,\ \alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{-11}{-(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{11}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{11}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{11}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=\frac{11}{2}\times\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{110}{21}$$ 답 ①

15 수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{799}+\sqrt{800}}$의 제$k$항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(k+1)-(k+2)}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$
$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{799}+\sqrt{800}}$$
$$=\sum_{k=1}^{798}a_k=\sum_{k=1}^{798}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})$$
$$+\cdots+(\sqrt{800}-\sqrt{799})$$
$$=\sqrt{800}-\sqrt{2}=19\sqrt{2}$$ 답 ②

16 $\sum_{n=2}^{81}\log_9\left(1-\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{81}\log_9\frac{n-1}{n}$

$$=\log_9\frac{1}{2}+\log_9\frac{2}{3}+\log_9\frac{3}{4}+\cdots+\log_9\frac{80}{81}$$
$$=\log_9\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{80}{81}\right)$$
$$=\log_9\frac{1}{81}=\log_9 9^{-2}=-2$$ 답 ②

기출 Best | 2회 p.99~101

01 ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{m=1}^{n}b_m=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$
$$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$$ (참)

ㄴ. $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$

$\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2$

이므로 $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\neq\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{j=m+1}^{n}a_j=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)$
$$+(a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots+a_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k$$ (참)

ㄹ. $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$
$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$$
$$=\sum_{i=1}^{2n}a_i$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ③

02 $\sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)=12$에서

$$\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k=12 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{20}(a_k-b_k)=-2$에서

$$\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{20}b_k=-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2\sum_{k=1}^{20}a_k=10 \quad \therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=5$$

㉠−㉡을 하면

$$2\sum_{k=1}^{20}b_k=14 \quad \therefore \sum_{k=1}^{20}b_k=7$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}(a_k+2b_k-1)=\sum_{k=1}^{20}a_k+2\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{20}1$$
$$=5+2\times7-1\times20=-1$$ 답 ②

03 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+2)^2=20$에서

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2+4a_k+4)=20 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{5}a_k(a_k+3)=60$에서

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2+3a_k)=60 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2+4a_k+4)-\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2+3a_k)=-40$$

$\sum_{k=1}^{5}\{(a_k^2+4a_k+4)-(a_k^2+3a_k)\}=-40$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+4)=-40$, $\sum_{k=1}^{5}a_k+4\times5=-40$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=-60$ 답 ③

04 자연수 k에 대하여

(i) $n=3k-2$일 때

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$=3(3k^2-4k+1)+1$

이므로 $a_{3k-2}=1$

(ii) $n=3k-1$일 때

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$

$=3(3k^2-2k)+1$

이므로 $a_{3k-1}=1$

(iii) $n=3k$일 때

$n^2=(3k)^2=9k^2=3\times3k^2$

이므로 $a_{3k}=0$

(i), (ii), (iii)에서 수열 $\{a_n\}$은 1, 1, 0이 이 순서대로 반복되는 수열이다.

이때 $500=3\times166+2$이므로

$\sum_{n=1}^{500}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{496}+a_{497}+a_{498}+a_{499}+a_{500}$

$=(1+1+0)+(1+1+0)+\cdots+(1+1+0)+1+1$

$=(1+1+0)\times166+1+1$

$=334$ 답 ②

05 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}-\sum_{k=1}^{100}a_{2k+1}$

$=(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{200})-(a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{201})$

$=(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+(a_6-a_7)+\cdots+(a_{200}-a_{201})$

$=\underbrace{-d+(-d)+\cdots+(-d)}_{100개}$

$=-100d$

이때 $a_3=1$, $a_7=-11$이므로

$a_1+2d=1$ ····· ㉠

$a_1+6d=-11$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_1=7$, $d=-3$

$\therefore \sum_{k=1}^{100}a_{2k}-\sum_{k=1}^{100}a_{2k+1}=-100d=-100\times(-3)=300$ 답 ④

06 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_7a_9=a_8^2=64$에서 $a_8=8$ $(\because a_n>0)$

$\therefore ar^7=8$ ····· ㉠

$a_8+a_{12}=136$에서 $8+a_{12}=136$, $a_{12}=128$

$\therefore ar^{11}=128$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4=16$, $r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $128a=8$ $\therefore a=\frac{1}{16}$

따라서 $a_n=\frac{1}{16}\times2^{n-1}=2^{-4}\times2^{n-1}=2^{n-5}$이므로

$a_{2k+3}=2^{(2k+3)-5}=2^{2k-2}=2^{2(k-1)}=4^{k-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_{2k+3}=\sum_{k=1}^{5}4^{k-1}=\frac{1\times(4^5-1)}{4-1}=341$ 답 ④

07 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3)$

$=(n^2+2n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+2k-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3)$

$=(n^2+2n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\{(k^2+2k-1)-(k^2+3)\}$

$=(n^2+2n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-4)$

$=(n^2+2n-1)+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}4$

$=(n^2+2n-1)+2\times\frac{(n-1)n}{2}-4(n-1)$

$=2n^2-3n+3$

즉 $2n^2-3n+3=138$이므로

$2n^2-3n-135=0$, $(2n+15)(n-9)=0$

$\therefore n=9$ $(\because n$은 자연수) 답 ③

다른풀이 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)-(n^2+3)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)+(n^2+3)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+2k-1)-(k^2+3)\}+(n^2+3)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-4)+(n^2+3)$

$=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}4+(n^2+3)$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-4n+(n^2+3)$

$=2n^2-3n+3$

즉 $2n^2-3n+3=138$이므로

$n=9$ $(\because n$은 자연수)

08 $\sum_{k=1}^{7}(k-a)^2=\sum_{k=1}^{7}(k^2-2ak+a^2)$

$=\sum_{k=1}^{7}k^2-2a\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}a^2$

$=\frac{7\times8\times15}{6}-2a\times\frac{7\times8}{2}+7a^2$

$=7a^2-56a+140$

$=7(a-4)^2+28$

따라서 $a=4$에서 최솟값을 갖는다. 답 ④

09 $1\times3+2\times4+3\times5+4\times6+\cdots+20\times22$

$=\sum_{k=1}^{20}k(k+2)=\sum_{k=1}^{20}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{20}k^2+2\sum_{k=1}^{20}k$

$=\frac{20\times21\times41}{6}+2\times\frac{20\times21}{2}=3290$ 답 ④

10 수열 1, 1+5, 1+5+9, 1+5+9+13, …의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+5+9+\cdots+(4n-3)$

$=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3n$

$=2n^2-n$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}$

$=715$ 답 ②

11 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3^{n+1}-3$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^2-3=6$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n+1}-3-\{3^{(n-1)+1}-3\}$

$=3^{n+1}-3^n=3^n\times(3-1)=2\times3^n$ …… ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\times3^n$

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39}=\sum_{k=1}^{20}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{20}2\times3^{2k-1}$

$=\frac{6\times(9^{20}-1)}{9-1}=\frac{3}{4}(3^{40}-1)$ 답 ③

12 $\sum_{m=1}^{10}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}4\right)\right\}=\sum_{m=1}^{10}\left(\sum_{l=1}^{m}4l\right)=\sum_{m=1}^{10}\left(4\sum_{l=1}^{m}l\right)$

$=\sum_{m=1}^{10}\left\{4\times\frac{m(m+1)}{2}\right\}$

$=2\sum_{m=1}^{10}(m^2+m)$

$=2\times\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)$

$=880$ 답 ②

13 $f(n)=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore f(8)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$ 답 ②

14 $f(x)=x^2+3x+2$라 할 때, 다항식 $f(x)$를 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(n)=n^2+3n+2$ $\therefore a_n=n^2+3n+2$

$\therefore \sum_{n=1}^{40}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{40}\frac{1}{n^2+3n+2}$

$=\sum_{n=1}^{40}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\sum_{n=1}^{40}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{41}\right)+\left(\frac{1}{41}-\frac{1}{42}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{42}=\frac{10}{21}$ 답 ③

15 $\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(2k-1)-(2k+1)}=\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$

즉 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=6$이므로 $\sqrt{2n+1}=13$

$2n+1=169$ $\therefore n=84$ 답 ②

16 $\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{k+1}{k}$

$=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{n+1}{n}$

$=\log_3\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\log_3(n+1)=5$

이므로 $n+1=3^5$ $\therefore n=242$ 답 ④

변형유형 집중공략 p.102~103

1-1 $\frac{a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n}{n+1}=n(3n+2)$에서

$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=n(n+1)(3n+2)$ …… ㉠

$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=(n-1)n(3n-1)\ (n\geq 2)$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $(2n-1)a_n=n(9n+1)$

$\therefore a_n=\frac{n(9n+1)}{2n-1}\ (n\geq 2)$ …… ㉢

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=1\times 2\times 5=10$

$a_1=10$은 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{n(9n+1)}{2n-1}$

$\therefore a_6=\frac{6\times(54+1)}{12-1}=30$

$\therefore a_1+a_6=10+30=40$ 답 40

1-2 $\sum_{k=1}^{n}\frac{3k-4}{a_k}=3n^2+n$ …… ㉠

에서

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3k-4}{a_k}=3(n-1)^2+(n-1)\ (n\geq 2)$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $\frac{3n-4}{a_n}=6n-2$

$\therefore a_n=\frac{3n-4}{6n-2}\ (n\geq 2)$ …… ㉢

㉠에 $n=1$을 대입하면 $\frac{-1}{a_1}=4$ $\therefore a_1=-\frac{1}{4}$

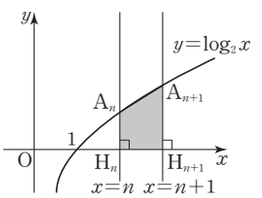
$a_1=-\frac{1}{4}$은 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{3n-4}{6n-2}$

따라서 $a_3=\frac{9-4}{18-2}=\frac{5}{16}$, $a_{12}=\frac{36-4}{72-2}=\frac{16}{35}$이므로

$a_1\times a_3\times a_{12}=-\frac{1}{4}\times\frac{5}{16}\times\frac{16}{35}=-\frac{1}{28}$ 답 ①

2-1



$A_n(n,\log_2 n)$, $H_n(n,0)$,

$A_{n+1}(n+1,\log_2(n+1))$, $H_{n+1}(n+1,0)$

이므로

$\overline{A_nH_n}=\log_2 n$, $\overline{A_{n+1}H_{n+1}}=\log_2(n+1)$, $\overline{H_nH_{n+1}}=1$

즉 사각형 $A_nH_nH_{n+1}A_{n+1}$은 높이가 1인 사다리꼴이므로 사각형 $A_nH_nH_{n+1}A_{n+1}$의 넓이 a_n은

$a_n=\frac{1}{2}\times(\overline{A_nH_n}+\overline{A_{n+1}H_{n+1}})\times\overline{H_nH_{n+1}}$

$=\frac{1}{2}\times\{\log_2 n+\log_2(n+1)\}\times 1$

$=\frac{1}{2}\log_2 n(n+1)$

따라서

$4^{a_n}=4^{\frac{1}{2}\log_2 n(n+1)}=(2^2)^{\frac{1}{2}\log_2 n(n+1)}$

$=2^{\log_2 n(n+1)}=n(n+1)$

이므로

$\sum_{k=1}^{8}4^{a_k}=\sum_{k=1}^{8}k(k+1)=\sum_{k=1}^{8}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\times 9\times 17}{6}+\frac{8\times 9}{2}=240$ 답 240

2-2 $A_{n+1}(n+1,0)$이므로 $\overline{A_{n+1}B_n}=2n-(n+1)=n-1$,

$\overline{B_nC_n}=\frac{n}{2}$이고

$a_n=\overline{A_{n+1}B_n}\times\overline{B_nC_n}=(n-1)\times\frac{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

$\therefore \sum_{k=2}^{11}\frac{1}{a_k}$

$=\sum_{k=2}^{11}\frac{2}{k(k-1)}=2\sum_{k=2}^{11}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\times\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$ 답 ③

서술형 What & How p.104~105

1 $S_n=2n^2+n$에서

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2+1=3$ …… ❶

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=4n-1$ …… ㉠ …… ❷

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-1$ …… ❸

$\therefore \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$

$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{39}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{39}\right)=\frac{1}{13}$

따라서 $p=13$, $q=1$이므로

$p+q=13+1=14$ …… ❹

답 14

2 (i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+2\times1=3$ …… ❶

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ …… ㉠ …… ❷

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$ …… ❸

$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$이므로

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{33}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)=\frac{5}{33}$

따라서 $p=33$, $q=5$이므로

$p-q=33-5=28$ …… ❹

답 28

채점기준	배점
❶ a_1의 값 구하기	1
❷ $n\geq2$일 때 a_n 구하기	1
❸ a_n 구하기	1
❹ $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$의 값과 $p-q$의 값 구하기	2

3 $T_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^ka_k$

$=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$

$=(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})$

$=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$ …… ❶

이때 $a_n=2n-5$에서

$a_{2k}=2\times2k-5=4k-5$, $a_{2k-1}=2(2k-1)-5=4k-7$

이므로

$T_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}(4k-5)-\sum_{k=1}^{n}(4k-7)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(4k-5)-(4k-7)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}2=2n$ …… ❷

$\therefore\sum_{k=1}^{20}T_{2k}=\sum_{k=1}^{20}2k=2\times\frac{20\times21}{2}=420$ …… ❸

답 420

4 $a_n=2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$ …… ❶

$\sum_{k=1}^{20}(-1)^ka_{k+1}$

$=-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots+a_{21}$

$=(a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{21})-(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})$

$=\sum_{k=1}^{10}a_{2k+1}-\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k+1}-a_{2k})$ …… ❷

이때 $a_n=n(n+1)$에서

$a_{2k+1}=(2k+1)(2k+2)$, $a_{2k}=2k(2k+1)$

이므로

$a_{2k+1}-a_{2k}=(2k+1)(2k+2)-2k(2k+1)$

$=(2k+1)\{(2k+2)-2k\}$

$=(2k+1)\times2=4k+2$

$\therefore\sum_{k=1}^{20}(-1)^ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k+1}-a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)$

$=4\times\frac{10\times11}{2}+2\times10$

$=220+20=240$ …… ❸

답 240

채점기준	배점
❶ a_n 구하기	1
❷ $\sum_{k=1}^{20}(-1)^ka_{k+1}$을 $\sum_{k=1}^{10}(a_{2k+1}-a_{2k})$ 꼴로 변형하기	2
❸ $\sum_{k=1}^{20}(-1)^ka_{k+1}$의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회 p.106~109

01 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+3b_k)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)+2b_k\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(8+2b_k)$

$=80+2\sum_{k=1}^{10}b_k$

즉 $80+2\sum_{k=1}^{10}b_k=140$이므로

$2\sum_{k=1}^{10}b_k=60$ $\therefore\sum_{k=1}^{10}b_k=30$

답 ①

02 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k=5n^2$

$n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{10} a_k=5\times5^2=125$ 답 ③

03 $\sum_{k=1}^{7} k^2+\sum_{k=2}^{7} k^2+\sum_{k=3}^{7} k^2+\sum_{k=4}^{7} k^2+\sum_{k=5}^{7} k^2+\sum_{k=6}^{7} k^2+\sum_{k=7}^{7} k^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+7^2)$

$\quad+(3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)+\cdots+(6^2+7^2)+7^2$

$=1\times1^2+2\times2^2+3\times3^2+\cdots+7\times7^2$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3$

$=\sum_{k=1}^{7} k^3=\left(\frac{7\times8}{2}\right)^2=28^2$

$\therefore N=28$ 답 ②

04 $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{l(l+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^2+l)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=20$이므로

$n(n+1)(n+2)=120=4\times5\times6$

$\therefore n=4$ 답 ①

05 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_1a_4=8$에서 $a_1\times a_1r^3=8$

$\therefore a_1^2r^3=8$ ····· ㉠

$a_3a_6=128$에서 $a_1r^2\times a_1r^5=128$

$\therefore a_1^2r^7=128$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=16$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$8a_1^2=8$, $a_1^2=1$ $\therefore a_1=1$ ($\because a_1>0$)

$\therefore a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

따라서

$a_{3k-2}=2^{(3k-2)-1}=2^{3k-3}$, $a_{3k-1}=2^{(3k-1)-1}=2^{3k-2}$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_{3k-2}+a_{3k-1})=\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}$

$=\sum_{k=1}^{10}2^{3k-3}+\sum_{k=1}^{10}2^{3k-2}$

$=\frac{1\times(8^{10}-1)}{8-1}+\frac{2\times(8^{10}-1)}{8-1}$

$=\frac{3}{7}(8^{10}-1)=\frac{3}{7}(2^{30}-1)$ 답 ④

06 $a_1=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2=\cos\frac{\pi}{2}=0$,

$a_3=\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_4=\cos\pi=-1$,

$a_5=\cos\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_6=\cos\frac{3}{2}\pi=0$,

$a_7=\cos\frac{7}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_8=\cos2\pi=1$,

$a_9=\cos\frac{9}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ⋯

함수 $y=\cos x$의 주기는 2π이므로 수열 $\{a_n\}$은

$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

이 순서대로 반복되는 수열이다.

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1이 반복되는 수열이므로

$\sum_{n=1}^{12} a_n^2=\left(\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+1\right)\times3=6$ 답 ①

07 $a_n=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore \frac{3}{a_1}+\frac{5}{a_2}+\frac{7}{a_3}+\cdots+\frac{21}{a_{10}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2k+1}{a_k}$

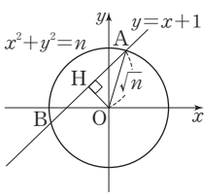
$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=6\times\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{60}{11}$ 답 ⑤

08 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=n$과 직선 $y=x+1$의 두 교점을 A, B라 하고, 원점 O에서 직선 $y=x+1$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

원 $x^2+y^2=n$의 반지름의 길이는 $\sqrt{n}$이므로 직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{(\sqrt{n})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{n-\frac{1}{2}}$

즉 $l_n=\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{n-\frac{1}{2}}$이므로

$\sum_{n=1}^{30} l_n^2=\sum_{n=1}^{30}4\left(n-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{30}(4n-2)$

$=4\sum_{n=1}^{30}n-\sum_{n=1}^{30}2$

$=4\times\frac{30\times31}{2}-2\times30$

$=1800$ 답 ⑤

09 α_n, β_n이 이차방정식 $x^2+2nx-2n=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-2n$, $\alpha_n\beta_n=-2n$

이때

$\alpha_n^2+\beta_n^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n$

$=(-2n)^2-2\times(-2n)$

$=4n^2+4n=4n(n+1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{\alpha_n^2+\beta_n^2}$

$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{22}$ 답 ②

10 $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$이므로

$\sum_{k=1}^{12}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{12}}-\frac{1}{S_{13}}\right)$

$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{13}}=\frac{1}{5}$

이때 $S_1=a_1=4$이므로 $\frac{1}{4}-\frac{1}{S_{13}}=\frac{1}{5}$

$\frac{1}{S_{13}}=\frac{1}{20}$ $\therefore S_{13}=20$ 답 ④

11 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

조건 (가)에서

$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{39}$

$=\log_3 a_1+\log_3 a_3+\log_3 a_5+\cdots+\log_3 a_{39}$

$=\log_3(a_1a_3a_5\cdots a_{39})$

$=\log_3(a\times ar^2\times ar^4\times\cdots\times ar^{38})$

$=\log_3(a^{20}r^{2+4+6+\cdots+38})$

이때

$2+4+6+\cdots+38=\sum_{k=1}^{19}2k=2\times\frac{19\times20}{2}=380$

이므로

$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{39}=\log_3(a^{20}r^{2+4+6+\cdots+38})$

$=\log_3 a^{20}r^{380}=300$

$\therefore a^{20}r^{380}=3^{300}$ …… ㉠

또 조건 (나)에서

$b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{40}$

$=\log_3 a_2+\log_3 a_4+\log_3 a_6+\cdots+\log_3 a_{40}$

$=\log_3(a_2a_4a_6\cdots a_{40})$

$=\log_3(ar\times ar^3\times ar^5\times\cdots\times ar^{39})$

$=\log_3(a^{20}r^{1+3+5+\cdots+39})$

이때

$1+3+5+\cdots+39=\sum_{k=1}^{20}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}1$

$=2\times\frac{20\times21}{2}-1\times20=400$

이므로

$b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{40}=\log_3(a^{20}r^{1+3+5+\cdots+39})$

$=\log_3 a^{20}r^{400}=320$

$\therefore a^{20}r^{400}=3^{320}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^{20}=3^{20}$ $\therefore r=(3^{20})^{\frac{1}{20}}=3$ $(\because r>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$a^{20}3^{380}=3^{300}$, $a^{20}=3^{-80}$

$\therefore a=(3^{-80})^{\frac{1}{20}}=3^{-4}$ $(\because a>0)$

따라서 $a_n=3^{-4}\times3^{n-1}=3^{n-5}$이므로

$b_n=\log_3 a_n=\log_3 3^{n-5}=n-5$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}b_k=\sum_{k=1}^{15}(k-5)=\frac{15\times16}{2}-5\times15$

$=120-75=45$ 답 ①

12 $a_n=f_n(1)=3^n+2^n+1$, $b_n=f_n(-1)=-3^n+2^n-1$

이므로

$a_n-b_n=(3^n+2^n+1)-(-3^n+2^n-1)$

$=2\times3^n+2$

$\therefore \sum_{n=1}^{30}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{30}(2\times3^n+2)$

$=\frac{6\times(3^{30}-1)}{3-1}+2\times30=3^{31}+57$ 답 ④

13 7로 나누었을 때 나머지가 3인 자연수를 나열하면

3, 10, 17, 24, 31, …

이 수열은 첫째항이 3이고 공차가 7인 등차수열이므로 이 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=3+(n-1)\times7=7n-4$

이때 $a_n\le100$이므로 $7n-4\le100$

$7n\le104$ $\therefore n\le\frac{104}{7}=14.8\cdots$

따라서 7로 나누었을 때 나머지가 3인 100 이하의 자연수는 a_1, a_2, a_3, …, a_{14}이고 그 합은

$\sum_{k=1}^{14}a_k=\sum_{k=1}^{14}(7k-4)=7\times\frac{14\times15}{2}-4\times14=679$ 답 ④

참고 $a_{14}=7\times14-4=94$

14 수열 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, …, $\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

따라서

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

이므로

$$\frac{2n}{n+1}=\frac{48}{25},\ \frac{n}{n+1}=\frac{24}{25}$$

$\therefore n=24$ 답 ⑤

15 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times 2+n\times 1$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\{n-(k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}(kn-k^2+k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}\{3(n+1)-(2n+1)\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=286$$

이므로

$n(n+1)(n+2)=286\times 6=11\times 12\times 13$

$\therefore n=11$ 답 ①

16 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{k=1}^{5}a_k=8$에서

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=8$

$a(1+r+r^2+r^3+r^4)=8$ …… ㉠

$\sum_{k=6}^{10}a_k=16$에서

$ar^5+ar^6+ar^7+ar^8+ar^9=16$

$ar^5(1+r+r^2+r^3+r^4)=16$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5=2$

$$\therefore \sum_{k=11}^{20}a_k=a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$$

$$=ar^{10}+ar^{11}+ar^{12}+\cdots+ar^{19}$$

$$=r^{10}(a+ar+ar^2+\cdots+ar^9)$$

$$=r^{10}\times\sum_{k=1}^{10}a_k$$

$$=(r^5)^2\times\left(\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=6}^{10}a_k\right)$$

$$=2^2\times(8+16)$$

$$=96$$

답 ⑤

17 8^n의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복되고, 2^n의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복된다.

이때

$$\sum_{k=1}^{4}(b_k-a_k)=(2-8)+(4-4)+(8-2)+(6-6)=0$$

이고 $50=4\times 12+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{50}(b_k-a_k)=0\times 12+(2-8)+(4-4)=-6$$

답 ②

18 $S_n=n^2+3n+1$에서

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1+3+1=5$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n+1-\{(n-1)^2+3(n-1)+1\}$

$=2n+2$ …… ㉢

이때 $a_1=5$는 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=5,\ a_n=2n+2\ (n\geq 2)$ …… ❶

따라서 $k\geq 2$일 때

$$\frac{4}{a_ka_{k+1}}=\frac{4}{(2k+2)(2k+4)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\frac{4}{a_1a_2}+\sum_{k=2}^{10}\frac{4}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\frac{4}{5\times 6}+\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{2}{15}+\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{15}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)=\frac{23}{60}$$ …… ❷

따라서 $p=60,\ q=23$이므로

$p+q=60+23=83$ …… ❸

답 83

채점기준	배점
❶ a_n 구하기	2
❷ $\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{a_ka_{k+1}}$의 값 구하기	3
❸ $p+q$의 값 구하기	1

19 $a_n=\log\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=\log\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log\frac{n}{n+1}$ …… ❶

이므로

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{3}\log\frac{k}{k+1}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m}\log\frac{k}{k+1}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\cdots+\log\frac{m}{m+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{m}{m+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\log\frac{1}{m+1}=-\frac{1}{3}\log(m+1) \quad \cdots\cdots ❷$$

$-\frac{1}{3}\log(m+1)$이 정수이어야 하므로

$\frac{1}{3}\log(m+1)=N$ (N은 정수)이라 하면

$\log(m+1)=3N$, $m+1=10^{3N}$

$\therefore m=10^{3N}-1$ $\cdots\cdots ❸$

$N=0$일 때 $m=1-1=0$

$N=1$일 때 $m=10^3-1=999$

따라서 자연수 m의 최솟값은 999 $\cdots\cdots ❹$

답 999

채점기준	배점
❶ 일반항 a_n 변형하기	1
❷ $\sum_{k=1}^{m} a_k$를 간단히 하기	2
❸ $\sum_{k=1}^{m} a_k$가 정수가 될 조건 구하기	2
❹ 자연수 m의 최솟값 구하기	1

참고 $N<0$이면 m은 정수가 아니다.

실전 문제 | 2회

p.110~113

01 $\sum_{k=1}^{10} a_k=8\times10=80$, $\sum_{k=1}^{10} b_k=4\times10=40$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k+2)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}2$$
$$=2\times80-40+2\times10=140$$

답 ⑤

02 $$\sum_{k=1}^{12} a_k=\sum_{k=1}^{12} 2^{-k}\cos k\pi$$
$$=\frac{\cos\pi}{2}+\frac{\cos2\pi}{2^2}+\frac{\cos3\pi}{2^3}+\cdots+\frac{\cos12\pi}{2^{12}}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{12}}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{12}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=-\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right\}$$

답 ②

03 $$\sum_{k=1}^{10} a_{k+1}-\sum_{k=3}^{10} a_k$$
$$=(a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{10}+a_{11})-(a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{10})$$
$$=a_2+a_{11}$$
$$=(2^2+2+1)+(11^2+11+1)$$
$$=7+133=140$$

답 ④

04 $$\sum_{k=1}^{40}(-1)^k a_k=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{40}$$
$$=-(a_1+a_3+\cdots+a_{39})+(a_2+a_4+\cdots+a_{40})$$
$$=-\sum_{k=1}^{20} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$$
$$=-25+20=-5$$

답 ②

05 $\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k+1})=78$에서

$(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{20}+a_{21})=78$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{21}=-3+78=75$

즉 $\sum_{k=1}^{21} a_k=75$이므로

$$\sum_{k=1}^{21}(3a_k-2)=3\sum_{k=1}^{21}a_k-\sum_{k=1}^{21}2$$
$$=3\times75-2\times21$$
$$=183$$

답 ②

06 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_8-a_2=24$에서

$(3+7d)-(3+d)=24$, $6d=24$ $\therefore d=4$

$\therefore a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$

따라서

$a_{11}=4\times11-1=43$, $a_{20}=4\times20-1=79$

이므로

$$\sum_{k=11}^{20} a_k=\frac{10(a_{11}+a_{20})}{2}=\frac{10\times(43+79)}{2}=610$$

답 ③

07 수열 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, …의 제$k$항을 a_k라 하면

$$a_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

이므로 이 수열의 첫째항부터 제30항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{30} a_k=\sum_{k=1}^{30}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}=\sum_{k=1}^{30}2-\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=2\times30-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}}{1-\frac{1}{2}}=60-2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right\}$$
$$=58+\left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

따라서 $p=58$, $q=29$이므로

$p+q=58+29=87$

답 ③

08 $\sum_{k=1}^{m}k^2+\sum_{k=2}^{m}k^2+\sum_{k=3}^{m}k^2+\cdots+\sum_{k=m}^{m}k^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+m^2)$

$\quad+(3^2+4^2+5^2+\cdots+m^2)+\cdots+m^2$

$=1\times1^2+2\times2^2+3\times3^2+\cdots+m\times m^2$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3$

$=\sum_{k=1}^{m}k^3=\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

즉 $\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2=441$이므로

$\frac{m(m+1)}{2}=21$ ($\because$ m은 자연수)

$m(m+1)=42=6\times7$

$\therefore m=6$ 답 ②

09 $\sum_{k=1}^{9}k^2a_{k+1}=\sum_{k=2}^{10}(k-1)^2a_k$

$=\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2a_k$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k+1)a_k$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+1)a_k-2ka_k\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+1)a_k-2\sum_{k=1}^{10}ka_k$

$=10-2\times3=4$ 답 ④

10 $\sum_{m=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{m}(k+m+n)\right\}$

$=\sum_{m=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}(m+n)\right\}$

$=\sum_{m=1}^{5}\left\{\frac{m(m+1)}{2}+m(m+n)\right\}$

$=\sum_{m=1}^{5}\left\{\frac{3}{2}m^2+\frac{m(2n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{5}m^2+\frac{2n+1}{2}\sum_{m=1}^{5}m$

$=\frac{3}{2}\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{2n+1}{2}\times\frac{5\times6}{2}$

$=\frac{165}{2}+\frac{15(2n+1)}{2}$

즉 $\frac{165}{2}+\frac{15(2n+1)}{2}=150$이므로

$165+15(2n+1)=300$, $15(2n+1)=135$

$2n+1=9$, $2n=8$ $\quad\therefore n=4$ 답 ①

11 $n=3$일 때 $(-2)^2=4$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $a_3=1$

$n=4$일 때 $(-2)^3=-8$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $a_4=0$

$n=5$일 때 $(-2)^4=16$의 다섯제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $a_5=1$

$\vdots$

즉 $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{은 짝수})\\ 1 & (n\text{은 홀수})\end{cases}$이므로

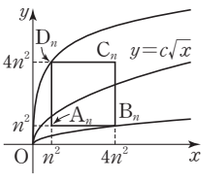
$\sum_{n=3}^{9}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\cdots+\frac{a_9}{2^9}$

$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^9}$

$=\frac{\frac{1}{2^3}\left\{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^4\right\}}{1-\frac{1}{2^2}}$

$=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{256}\right)=\frac{85}{512}$ 답 ③

12 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=c\sqrt{x}$의 그래프가 점 $B_n(4n^2, n^2)$을 지날 때 정사각형과 만나기 시작하여 점 $D_n(n^2, 4n^2)$을 지날 때까지 만난다.



함수 $y=c\sqrt{x}$의 그래프가 점 $B_n(4n^2, n^2)$을 지날 때

$n^2=c\sqrt{4n^2}$, $n^2=2cn$ $\quad\therefore c=\frac{n}{2}$

또 함수 $y=c\sqrt{x}$의 그래프가 점 $D_n(n^2, 4n^2)$을 지날 때

$4n^2=c\sqrt{n^2}$, $4n^2=cn$ $\quad\therefore c=4n$

즉 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 함수 $y=c\sqrt{x}$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 c의 값의 범위는

$\frac{n}{2}\le c\le4n$ ····· ㉠

(i) $n=2m$ (m은 자연수)일 때

㉠에서 $m\le c\le8m$이므로 자연수 c는

m, $m+1$, $m+2$, …, $8m$

즉 자연수 c의 개수는 $8m-m+1=7m+1$이므로

$a_{2m}=7m+1$

(ii) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

㉠에서 $\frac{2m-1}{2}\le c\le4(2m-1)$, 즉

$m-\frac{1}{2}\le c\le8m-4$이므로 자연수 c는

m, $m+1$, $m+2$, …, $8m-4$

즉 자연수 c의 개수는 $(8m-4)-m+1=7m-3$이므로

$a_{2m-1}=7m-3$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{5}\{(7k-3)+(7k+1)\}$

$=\sum_{k=1}^{5}(14k-2)$

$=14\times\frac{5\times6}{2}-2\times5$

$=200$ 답 ②

13 $\sum_{k=2}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 5n^2\ (n \geq 2)$에서

$(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})=5n^2$

$\therefore a_n - a_1 = 5n^2\ (n \geq 2)$ ····· ㉠

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_2 - a_1 = 20$

이때 $a_1+a_2=16$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a_1=-2,\ a_2=18$

$a_1=-2$를 ㉠에 대입하면

$a_n+2=5n^2\ (n \geq 2)$

$\therefore a_n=5n^2-2\ (n \geq 2)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{7} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{7} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{7} (5k^2-2)$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{7} (5k^2-2) - (5\times 1^2 - 2)$$

$$= -2 + \left(5\times\frac{7\times 8\times 15}{6} - 2\times 7\right) - 3$$

$$= 681$$

답 ①

14 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d>0)$라 하면

$|a_5| = a_9$에서 $|a+4d| = a+8d$

(i) $a+4d = a+8d$일 때

$d=0$이므로 모순이다.

(ii) $a+4d = -(a+8d)$일 때

$a+4d = -a-8d,\ 2a=-12d$

$\therefore a=-6d$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{24}$에서

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+5d}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\times\frac{5d}{a(a+5d)}$$

$$= \frac{5}{a(a+5d)} = \frac{5}{24}$$

이므로 $a(a+5d)=24$

$-6d(-6d+5d)=24\ (\because$ ㉠$),\ 6d^2=24,\ d^2=4$

$\therefore d=2\ (\because d>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=-6\times 2=-12$

따라서 $a_n=-12+(n-1)\times 2=2n-14$이므로

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} (2k-14)$$

$$= 2\times\frac{12\times 13}{2} - 14\times 12$$

$$= -12$$

답 ①

15 조건 (가)에서

$\sum_{k=1}^{9} |a_k| = \sum_{k=1}^{9} a_k$이고 $\sum_{k=1}^{n} |a_k| > \sum_{k=1}^{n} a_k\ (n \geq 10)$

$\sum_{k=1}^{9} |a_k| = \sum_{k=1}^{9} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{9} |a_k| - \sum_{k=1}^{9} a_k = 0$

$\therefore \sum_{k=1}^{9} (|a_k| - a_k) = 0$

임의의 실수 a_k에 대하여 $|a_k| - a_k \geq 0$이므로

$k=1, 2, 3, \ldots, 9$일 때 $|a_k| - a_k = 0$, 즉 $|a_k| = a_k$

$k=10, 11, 12, \ldots$일 때 $|a_k| - a_k > 0$, 즉 $|a_k| > a_k$

$\therefore 1 \leq k \leq 9$일 때 $a_k \geq 0$, $k \geq 10$일 때 $a_k < 0$ ····· ㉠

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a>0,\ d<0$

이고, 조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{4} |a_k| = \sum_{k=1}^{4} a_k$, $|a_{35}| = -a_{35}$이므로

$\sum_{k=1}^{4} a_k = -a_{35}$

$\frac{4(a_1+a_4)}{2} = -a_{35},\ 2(a_1+a_4) = -a_{35}$

$2\{a+(a+3d)\} = -(a+34d)$

$4a+6d = -a-34d,\ 5a+40d=0,\ a+8d=0$

$\therefore a=-8d$ ····· ㉡

이때 $\sum_{k=1}^{7} |a_k| = |a_m|$에서 $\sum_{k=1}^{7} a_k = |a_m|\ (\because$ ㉠$)$

$\frac{7(a_1+a_7)}{2} = |a_m|,\ \frac{7\{a+(a+6d)\}}{2} = |a+(m-1)d|$

$7(a+3d) = |a+(m-1)d|$

$7(-8d+3d) = |-8d+(m-1)d|\ (\because$ ㉡$)$

$-35d = |(m-9)d|,\ -35d = |m-9||d|$

$-35d = |m-9|\times(-d),\ 35 = |m-9|\ (\because d<0)$

$m-9=35$ 또는 $m-9=-35$

m은 자연수이므로 $m=44$

답 ③

16 $a_n=3n-1,\ b_n=7\times 2^{n-1}$에서

$a_{2k}=3\times 2k-1=6k-1,\ b_{3k}=7\times 2^{3k-1}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k}+b_{3k}) = \sum_{k=1}^{10} a_{2k} + \sum_{k=1}^{10} b_{3k}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (6k-1) + \sum_{k=1}^{10} (7\times 2^{3k-1})$$

$$= 6\times\frac{10\times 11}{2} - 1\times 10 + 7\times\frac{4\times(8^{10}-1)}{8-1}$$

$$= 320 + 4\times(8^{10}-1)$$

$$= 320 + 4\times 8^{10} - 4$$

$$= 2^{32} + 316$$

답 ③

17 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2-2n$ ····· ㉠

에서

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)a_k} = (n-1)^2 - 2(n-1)\ (n \geq 2)$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}\ (n\geq 2)$$

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n-3\ (n\geq 2)$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}\ (n\geq 2) \quad \cdots\cdots ㉢$$

한편 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$$\frac{1}{a_1}=1^2-2 \qquad \therefore a_1=-1$$

이때 $a_1=-1$은 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(2k-3)(2k-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(-1-1)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{39}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-1-\frac{1}{39}\right)$$

$$=-\frac{20}{39}$$

답 ①

18 $12=2^2\times 3$과 서로소인 수는 2의 배수도 3의 배수도 아닌 수이다. 이때 2와 3의 최소공배수가 6이므로 2의 배수도 3의 배수도 아닌 수는 6으로 나누었을 때 나머지가 1 또는 5인 수이다. …… ❶

6으로 나누었을 때 나머지가 1인 두 자리 자연수는

13, 19, 25, …, 97 ← 항 15개

이 수열의 일반항을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_n=13+(n-1)\times 6=6n+7$

6으로 나누었을 때 나머지가 5인 두 자리 자연수는

11, 17, 23, …, 95 ← 항 15개

이 수열의 일반항을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n=11+(n-1)\times 6=6n+5$ …… ❷

따라서 12와 서로소인 모든 두 자리 자연수의 합은

$(13+19+25+\cdots+97)+(11+17+23+\cdots+95)$

$$=\sum_{k=1}^{15}(6k+7)+\sum_{k=1}^{15}(6k+5)$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\{(6k+7)+(6k+5)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}(12k+12)$$

$$=12\sum_{k=1}^{15}(k+1)$$

$$=12\left(\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}1\right)$$

$$=12\times\left(\frac{15\times 16}{2}+1\times 15\right)$$

$=1620$ …… ❸

답 1620

채점기준	배점
❶ 12와 서로소인 수는 6으로 나누었을 때 나머지가 1 또는 5인 수임을 설명하기	2
❷ 6으로 나누었을 때 나머지가 1, 5인 수의 일반항을 각각 구하기	2
❸ 12와 서로소인 모든 두 자리 자연수의 합 구하기	2

참고 6으로 나누었을 때 나머지가 0, 2, 4인 자연수는 짝수이므로 2의 배수이다.

6으로 나누었을 때 나머지가 3인 자연수는

$6k-3=3(2k-1)$(k는 자연수) 꼴이므로 3의 배수이다.

참고 97을 수열 $\{a_n\}$의 i번째 항이라 하면

$97=6i+7$, $90=6i$ $\therefore i=15$

95를 수열 $\{b_n\}$의 j번째 항이라 하면

$95=6j+5$, $90=6j$ $\therefore j=15$

19 $x^2-(n-2)x+(3n-12)(-2n+10)=0$에서

$\{x-(-2n+10)\}\{x-(3n-12)\}=0$

$\therefore x=-2n+10$ 또는 $x=3n-12$

따라서 조건 ㈎에서

$a_n=-2n+10$ 또는 $a_n=3n-12$ …… ❶

$\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값이 최대이려면 a_1부터 a_8까지의 항을 다음과 같이 택해야 한다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$-2n+10$	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8
$3n-12$	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15

그런데 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값이 최대이면서 조건 ㈏가 성립하려면 $a_4\leq 0$이어야 하고, $a_9\leq 0$, $a_i\geq 0$ ($i=1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$)이어야 한다.

즉 a_1부터 a_9까지의 항을 다음과 같이 택해야 한다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$-2n+10$	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8
$3n-12$	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15

…… ❷

따라서 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 최댓값은

$8+6+4+0+3+6+9+12=48$ …… ❸

답 48

참고 $a_4=0$, $a_9=-8$일 때

$a_3\times a_4=0$, $a_4\times a_5=0$, $a_8\times a_9<0$

이므로 $a_n\times a_{n+1}\leq 0$을 만족시키는 8 이하의 자연수 n은 3, 4, 8의 3개이다.

채점기준	배점
❶ 조건 ㈎를 만족시키는 a_n 구하기	2
❷ $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값이 최대가 되기 위한 a_1부터 a_9까지의 항 구하기	4
❸ $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 최댓값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제 p.114~118

1 $\sum_{n=1}^{16} a_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}$

$=(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)+(a_9+a_{13})$
$+(a_{10}+a_{14})+(a_{11}+a_{15})+(a_{12}+a_{16})$

$=12\times 8=96$ 답 96

다른풀이 $a_n+a_{n+4}=12$ …… ㉠

에서

$a_{n+4}+a_{n+8}=12$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_n-a_{n+8}=0$ $\therefore a_{n+8}=a_n$

즉 $a_1=a_9$, $a_2=a_{10}$, $a_3=a_{11}$, …, $a_8=a_{16}$이므로

$\sum_{n=1}^{16} a_n = 2\sum_{n=1}^{8} a_n$

$=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8)$
$=2\{(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)\}$
$=2\times(12+12+12+12)=96$

2 $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n a_n$

$=-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{20}$
$=\{(a_6-a_1)-(a_7-a_2)+(a_8-a_3)-(a_9-a_4)+(a_{10}-a_5)\}$
$+\{(a_{16}-a_{11})-(a_{17}-a_{12})+(a_{18}-a_{13})-(a_{19}-a_{14})$
$+(a_{20}-a_{15})\}$
$=(6-6+6-6+6)+(6-6+6-6+6)$
$=12$ 답 12

3 $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{b_2}=\frac{1}{2}$ ($\because a_1=2$) $\therefore b_2=4$

$b_1=2$, $b_2=4$이므로 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 $b_2-b_1=4-2=2$인 수열이고, 그 일반항은

$b_n=2+(n-1)\times 2=2n$

따라서 $b_{k+1}=2(k+1)=2k+2$이므로 ㉠에서

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2k+2} = \frac{1}{2}n^2$ …… ㉡

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2k+2} = \frac{1}{2}(n-1)^2$ $(n\geq 2)$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면

$\frac{a_n}{2n+2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2$ $(n\geq 2)$

$\frac{a_n}{2n+2}=n-\frac{1}{2}$ $(n\geq 2)$

$\therefore a_n=(2n+2)\left(n-\frac{1}{2}\right)=2n^2+n-1$ $(n\geq 2)$ …… ㉣

이때 $a_1=2$는 ㉣에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n^2+n-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5} (2k^2+k-1)$

$=2\times\frac{5\times 6\times 11}{6}+\frac{5\times 6}{2}-1\times 5$

$=120$ 답 ①

4 $\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{4}n^2$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{4}$

$\frac{4}{b_2}=\frac{1}{4}$ ($\because a_1=4$) $\therefore b_2=16$

$b_1=8$, $b_2=16$이므로 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 $b_2-b_1=16-8=8$인 수열이고, 그 일반항은

$b_n=8+(n-1)\times 8=8n$

따라서 $b_{k+1}=8(k+1)=8k+8$이므로 ㉠에서

$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)a_k}{8k+8} = \frac{1}{4}n^2$ …… ㉡

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1)a_k}{8k+8} = \frac{1}{4}(n-1)^2$ $(n\geq 2)$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면

$\frac{(2n-1)a_n}{8n+8}=\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{4}(n-1)^2$ $(n\geq 2)$

$\frac{(2n-1)a_n}{8n+8}=\frac{1}{4}(2n-1)$ $(n\geq 2)$

$\therefore a_n=\frac{1}{4}(8n+8)=2n+2$ $(n\geq 2)$ …… ㉣

이때 $a_1=4$는 ㉣에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2k+2)$

$=2\times\frac{10\times 11}{2}+2\times 10$

$=130$ 답 ④

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면

조건 ㈏에서 $\sum_{k=1}^{9} a_k = \frac{9(2a+8d)}{2}=27$

$a+4d=3$ $\therefore a=3-4d$ …… ㉠

조건 ㈎에서 $|a+3d|+|a+5d|=8$

$|(3-4d)+3d|+|(3-4d)+5d|=8$ ($\because$ ㉠)

$|3-d|+|3+d|=8$, $|d-3|+(3+d)=8$ ($\because d>0$)

$\therefore |d-3|+d=5$ …… ㉡

$d\geq 3$일 때, ㉡에서 $(d-3)+d=5$

$2d=8$ $\therefore d=4$

$0<d<3$일 때, ㉡에서 $-(d-3)+d=5$

즉 $3=5$이므로 모순이다.

따라서 $d=4$이므로 ㉠에서 $a=3-4\times 4=-13$

$\therefore a_n=-13+(n-1)\times 4=4n-17$

$\therefore a_{10}=4\times 10-17=23$ 답 ②

6 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{11} a_k=\frac{11(2a+10d)}{2}=44$

$a+5d=4$

$\therefore a=4-5d$ ····· ㉠

조건 (가)에서 $|a+4d|+|a+6d|=12$

$|(4-5d)+4d|+|(4-5d)+6d|=12$ ($\because$ ㉠)

$|4-d|+|4+d|=12$, $|d-4|+(4+d)=12$ ($\because d>0$)

$\therefore |d-4|+d=8$ ····· ㉡

$d\geq 4$일 때, ㉡에서 $(d-4)+d=8$

$2d=12$ $\therefore d=6$

$0<d<4$일 때, ㉡에서 $-(d-4)+d=8$

즉 $4=8$이므로 모순이다.

따라서 $d=6$이므로

㉠에서 $a=4-5\times 6=-26$

$\therefore a_n=-26+(n-1)\times 6=6n-32$

$\therefore a_{20}=6\times 20-32=88$ 답 ④

7 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로 첫째항을 a라 하면

$a_n=a+(n-1)\times 3=3n+a-3$

$a_5<a_7$이므로 조건 (가)에서 $a_5<0$, $a_7>0$

$\therefore 1\leq n\leq 5$일 때 $a_n<0$, $n\geq 7$일 때 $a_n>0$ ····· ㉠

$a_5=a+4\times 3=a+12<0$, $a_7=a+6\times 3=a+18>0$

이므로

$-18<a<-12$ ····· ㉡

따라서 조건 (나)의 $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$에서

$|a_7|+|a_8|+|a_9|+\cdots+|a_{12}|$

$=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+\cdots+|a_{12}|$

$|a_7|+|a_9|+|a_{11}|=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|$

$a_7+a_9+a_{11}=6-a_2-a_4+|a_6|$ ($\because$ ㉠)

$(a_7+a_{11})+a_9=6-(a_2+a_4)+|a_6|$

$2a_9+a_9=6-2a_3+|a_6|$ ← 등차중항

$3a_9=6-2a_3+|a_6|$

$3(a+8\times 3)=6-2(a+2\times 3)+|a+5\times 3|$

$3(a+24)=6-2(a+6)+|a+15|$

$\therefore |a+15|=5a+78$ ····· ㉢

(i) $a+15\geq 0$, 즉 $-15\leq a<-12$ ($\because$ ㉡)일 때, ㉢에서

$a+15=5a+78$

$-4a=63$ $\therefore a=-\frac{63}{4}$

그런데 $-15\leq a<-12$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+15<0$, 즉 $-18<a<-15$ ($\because$ ㉡)일 때, ㉢에서

$-(a+15)=5a+78$

$-6a=93$ $\therefore a=-\frac{31}{2}$

그런데 $-18<a<-15$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-\frac{31}{2}$이므로

$a_n=3n-\frac{31}{2}-3=3n-\frac{37}{2}$

$\therefore a_{10}=3\times 10-\frac{37}{2}=\frac{23}{2}$ 답 ③

참고 수열 $\{a_n\}$이 공차가 d인 등차수열일 때, 수열 $\{a_{2n-1}\}$, 수열 $\{a_{2n}\}$은 모두 공차가 $2d$인 등차수열이다.

8 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 첫째항을 a라 하면

$a_n=a+(n-1)\times 2=2n+a-2$

$a_7<a_9$이므로 조건 (가)에서 $a_7<0$, $a_9>0$

$\therefore 1\leq n\leq 7$일 때 $a_n<0$, $n\geq 9$일 때 $a_n>0$ ····· ㉠

$a_7=a+6\times 2=a+12<0$, $a_9=a+8\times 2=a+16>0$

이므로

$-16<a<-12$ ····· ㉡

따라서 $\sum_{k=1}^{8}|a_{k+8}|=4+\sum_{k=1}^{8}|a_{2k}|$에서

$|a_9|+|a_{10}|+|a_{11}|+\cdots+|a_{16}|$

$=4+|a_2|+|a_4|+|a_6|+\cdots+|a_{16}|$

$|a_9|+|a_{11}|+|a_{13}|+|a_{15}|=4+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|$

$a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}=4-a_2-a_4-a_6+|a_8|$ ($\because$ ㉠)

$(a_9+a_{15})+(a_{11}+a_{13})=4-(a_2+a_6)-a_4+|a_8|$

$2a_{12}+2a_{12}=4-2a_4-a_4+|a_8|$ ← 등차중항

$4a_{12}=4-3a_4+|a_8|$

$4(a+11\times 2)=4-3(a+3\times 2)+|a+7\times 2|$

$4(a+22)=4-3(a+6)+|a+14|$

$\therefore |a+14|=7a+102$ ····· ㉢

(i) $a+14\geq 0$, 즉 $-14\leq a<-12$ ($\because$ ㉡)일 때, ㉢에서

$a+14=7a+102$

$-6a=88$ $\therefore a=-\frac{44}{3}$

그런데 $-14\leq a<-12$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+14<0$, 즉 $-16<a<-14$ ($\because$ ㉡)일 때, ㉢에서

$-(a+14)=7a+102$

$-8a=116$ $\therefore a=-\frac{29}{2}$

그런데 $-16<a<-14$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-\frac{29}{2}$이므로

$a_n=2n-\frac{29}{2}-2=2n-\frac{33}{2}$

$\therefore a_{15}=2\times 15-\frac{33}{2}=\frac{27}{2}$ 답 ⑤

참고 수열 $\{a_n\}$이 공차가 d인 등차수열일 때, 수열 $\{a_{n+8}\}$은 공차가 d, 수열 $\{a_{2n}\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

9 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2=1$에서 $ar=1$ ····· ㉠

$r=1$일 때, $a_2=1$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=1$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}1=1\times n=n$

그런데

$\sum_{k=1}^{6}(-1)^kS_k=\sum_{k=1}^{6}(-1)^kk=-1+2-3+4-5+6=3$

이므로 $\sum_{k=1}^{6}(-1)^kS_k=21$을 만족시키지 않는다.

따라서 $r\neq1$, $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이다.

$\sum_{k=1}^{6}(-1)^kS_k=21$에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}(-1)^kS_k&=-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6\\&=(S_2+S_4+S_6)-(S_1+S_3+S_5)\\&=\sum_{k=1}^{3}S_{2k}-\sum_{k=1}^{3}S_{2k-1}\\&=\sum_{k=1}^{3}\frac{a(r^{2k}-1)}{r-1}-\sum_{k=1}^{3}\frac{a(r^{2k-1}-1)}{r-1}\\&=\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{a(r^{2k}-1)}{r-1}-\frac{a(r^{2k-1}-1)}{r-1}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{3}ar^{2k-1}=\frac{ar\{(r^2)^3-1\}}{r^2-1}\\&=\frac{ar(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{r^2-1}\\&=ar(r^4+r^2+1)\end{aligned}$$

이므로 $ar(r^4+r^2+1)=21$

$r^4+r^2+1=21$ ($\because$ ㉠), $r^4+r^2-20=0$

$(r^2+5)(r^2-4)=0$, $(r^2+5)(r+2)(r-2)=0$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$2a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore S_n=\dfrac{\frac{1}{2}(2^n-1)}{2-1}=\dfrac{1}{2}(2^n-1)$

따라서 $S_2=\dfrac{1}{2}(2^2-1)=\dfrac{3}{2}$, $S_7=\dfrac{1}{2}(2^7-1)=\dfrac{127}{2}$이므로

$S_2+S_7=\dfrac{3}{2}+\dfrac{127}{2}=65$ 답 ③

10 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=-8$에서 $ar^2=-8$

$\therefore a=-\dfrac{8}{r^2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$r=1$일 때, $a_3=-8$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=-8$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(-8)=-8\times n=-8n$

그런데

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}(-1)^kS_k&=\sum_{k=1}^{4}(-1)^k(-8k)=-8\sum_{k=1}^{4}(-1)^kk\\&=-8(-1+2-3+4)\\&=-8\times2=-16\end{aligned}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{4}(-1)^kS_k=20$을 만족시키지 않는다.

따라서 $r\neq1$, $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이다.

$\sum_{k=1}^{4}(-1)^kS_k=20$에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}(-1)^kS_k&=-S_1+S_2-S_3+S_4\\&=(S_2+S_4)-(S_1+S_3)\\&=\sum_{k=1}^{2}S_{2k}-\sum_{k=1}^{2}S_{2k-1}\\&=\sum_{k=1}^{2}\frac{a(r^{2k}-1)}{r-1}-\sum_{k=1}^{2}\frac{a(r^{2k-1}-1)}{r-1}\\&=\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{a(r^{2k}-1)}{r-1}-\frac{a(r^{2k-1}-1)}{r-1}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{2}ar^{2k-1}=\frac{ar\{(r^2)^2-1\}}{r^2-1}\\&=\frac{ar(r^2+1)(r^2-1)}{r^2-1}\\&=ar(r^2+1)\end{aligned}$$

이므로

$ar(r^2+1)=20$

$-\dfrac{8}{r}(r^2+1)=20$ ($\because$ ㉠)

$-\dfrac{2}{r}(r^2+1)=5$

$2r^2+2=-5r$, $2r^2+5r+2=0$

$(2r+1)(r+2)=0$

$\therefore r=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=-2$

(i) $r=-\dfrac{1}{2}$일 때

$r=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=-32$

따라서 $S_n=\dfrac{-32\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{64}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

이므로

$S_6=-\dfrac{64}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6\right\}=-\dfrac{64}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{64}\right)=-21$

(ii) $r=-2$일 때

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=-2$

따라서 $S_n=\dfrac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=-\dfrac{2}{3}\{1-(-2)^n\}$이므로

$S_6=-\dfrac{2}{3}\{1-(-2)^6\}=-\dfrac{2}{3}\times(1-64)=42$

(i), (ii)에서 모든 S_6의 값의 합은

$-21+42=21$ 답 ①

3 수학적 귀납법

교과서 예제 p.121

01 (1) $a_{n+1}=2a_n+n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$

$a_3=2a_2+2=2\times3+2=8$

$a_4=2a_3+3=2\times8+3=19$

$a_5=2a_4+4=2\times19+4=42$

(2) $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+(-1)=5+(-1)=4$

$a_3=a_2+(-1)^2=4+1=5$

$a_4=a_3+(-1)^3=5+(-1)=4$

$a_5=a_4+(-1)^4=4+1=5$

(3) $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_3=a_1+a_2=1+1=2$

$a_4=a_2+a_3=1+2=3$

$a_5=a_3+a_4=2+3=5$

(4) $a_{n+1}+a_n=10$, 즉 $a_{n+1}=-a_n+10$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=-a_1+10=-(-4)+10=14$

$a_3=-a_2+10=-14+10=-4$

$a_4=-a_3+10=-(-4)+10=14$

$a_5=-a_4+10=-14+10=-4$

답 (1) 42 (2) 5 (3) 5 (4) -4

02 참가자가 1명뿐이면 악수를 할 수 없으므로

$a_1=\boxed{0}$

n명의 참가자가 악수하는 총횟수는 a_n이고, n명의 참가자끼리 모두 악수를 한 후 $(n+1)$번째 참가자가 도착하면 이 참가자는 이미 와 있는 n명의 참가자와 모두 한 번씩 악수를 해야 한다.

따라서 $(n+1)$명의 참가자가 악수하는 총횟수 a_{n+1}은

$a_{n+1}=a_n+\boxed{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 답 0, n

참고 $a_n={}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ $(n\geq2)$, $a_1=0$이므로

$a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$ $(n\geq1)$

03 (1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n=5+(n-1)\times(-3)=-3n+8$

(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1, 공차가 $a_2-a_1=3-(-1)=4$인 등차수열이므로

$a_n=-1+(n-1)\times4=4n-5$

(3) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=\dfrac{1}{2}\times2^{n-1}=2^{n-2}$

(4) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3}{1}=3$인 등비수열이므로

$a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$

답 (1) $a_n=-3n+8$ (2) $a_n=4n-5$
(3) $a_n=2^{n-2}$ (4) $a_n=3^{n-1}$

04 (1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

답 (1) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

05 (ii) $n=k$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{\boxed{k^2+2k+1}}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{\boxed{k+1}}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

답 (가) k^2+2k+1 (나) $k+1$

기출 Best | 1회 p.122~124

01 $a_{n+1}-a_n=-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=48$이므로 일반항 a_n은

$a_n=48+(n-1)\times(-3)=-3n+51$

$a_k=9$에서

$-3k+51=9$, $-3k=-42$ $\therefore k=14$ 답 ④

02 $a_{n+1}\div a_n=-2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=\dfrac{1}{8}$이므로 일반항 a_n은

$a_n=\dfrac{1}{8}\times(-2)^{n-1}$

$a_k=-256$에서

$\frac{1}{8}\times(-2)^{k-1}=-256$

$(-2)^{k-1}=-256\times 8$, $(-2)^{k-1}=(-2)^{11}$

$k-1=11$ $\therefore k=12$ 답 ④

03 $a_{n+1}=a_n+n^2$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+1^2=-5+1=-4$

$a_3=a_2+2^2=-4+4=0$

$a_4=a_3+3^2=0+9=9$

$a_5=a_4+4^2=9+16=25$

$\therefore a_2+a_5=-4+25=21$ 답 ②

04 $a_{n+1}=4^n a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 8을 차례로 대입하면

$a_2=4^1 a_1$

$a_3=4^2 a_2=4^2\times 4^1 a_1=4^{1+2}a_1$

$a_4=4^3 a_3=4^3\times 4^{1+2}a_1=4^{1+2+3}a_1$

⋮

$a_9=4^{1+2+3+\cdots+8}a_1$

$=4^{\frac{8\times 9}{2}}\times 2=4^{36}\times 2=2^{73}$

$\therefore \log_2 a_9=\log_2 2^{73}=73$ 답 ②

05 $a_{n+1}=\frac{n+3}{n+4}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{4}{5}a_1$

$a_3=\frac{5}{6}a_2=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}a_1$

$a_4=\frac{6}{7}a_3=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}a_1$

⋮

$\therefore a_{20}=\frac{\cancel{22}}{23}\times\frac{\cancel{21}}{\cancel{22}}\times\frac{\cancel{20}}{\cancel{21}}\times\cdots\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\frac{4}{\cancel{5}}a_1$

$=\frac{4}{23}a_1=\frac{4}{23}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{23}$ 답 ③

06 $a_{n+1}=\frac{7a_n}{a_n+7}$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{7a_1}{a_1+7}=\frac{7\times 7}{7+7}=\frac{7}{2}$

$a_3=\frac{7a_2}{a_2+7}=\frac{7\times\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}+7}=\frac{7}{3}$

$a_4=\frac{7a_3}{a_3+7}=\frac{7\times\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}+7}=\frac{7}{4}$

$a_5=\frac{7a_4}{a_4+7}=\frac{7\times\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}+7}=\frac{7}{5}$

$\therefore a_6=\frac{7a_5}{a_5+7}=\frac{7\times\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}+7}=\frac{7}{6}$ 답 ③

07 $a_{n+1}+a_n=\frac{1}{2}n+1$에서 $a_{n+1}=-a_n+\frac{1}{2}n+1$

n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=-a_1+\frac{1}{2}\times 1+1=-a_1+\frac{3}{2}$

$a_3=-a_2+\frac{1}{2}\times 2+1=-\left(-a_1+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\times 2+1=a_1+\frac{1}{2}$

$a_4=-a_3+\frac{1}{2}\times 3+1=-\left(a_1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times 3+1=-a_1+2$

$a_5=-a_4+\frac{1}{2}\times 4+1=-(-a_1+2)+\frac{1}{2}\times 4+1=a_1+1$

이때 $a_5=11$이므로 $a_1+1=11$

$\therefore a_1=10$ 답 ③

다른풀이 $a_{n+1}+a_n=\frac{1}{2}n+1$의 n에 4, 3, 2, 1을 차례로 대입하면

$a_5+a_4=\frac{1}{2}\times 4+1$ …… ㉠

$a_4+a_3=\frac{1}{2}\times 3+1$ …… ㉡

$a_3+a_2=\frac{1}{2}\times 2+1$ …… ㉢

$a_2+a_1=\frac{1}{2}\times 1+1$ …… ㉣

㉠−㉡+㉢−㉣을 하면

$(a_5+a_4)-(a_4+a_3)+(a_3+a_2)-(a_2+a_1)$

$=\left(\frac{1}{2}\times 4+1\right)-\left(\frac{1}{2}\times 3+1\right)+\left(\frac{1}{2}\times 2+1\right)-\left(\frac{1}{2}\times 1+1\right)$

$a_5-a_1=\frac{1}{2}\{(4-3)+(2-1)\}$

$11-a_1=1$ ($\because a_5=11$) $\therefore a_1=10$

08 $a_{n+1}=a_n+3\times(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3\times(-1)^1=3-3=0$

$a_3=a_2+3\times(-1)^2=0+3=3$

$a_4=a_3+3\times(-1)^3=3-3=0$

$a_5=a_4+3\times(-1)^4=0+3=3$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 0이 이 순서대로 반복되는 수열이다.

이때 $333=2\times 166+1$이므로

$a_{333}=3$ 답 ④

참고 $a_{2k-1}=3$, $a_{2k}=0$ ($k=1, 2, 3, \ldots$)

09 $a_n=\frac{1}{2}S_n+\frac{3}{2}$ …… ㉠

에서

$a_{n+1}=\frac{1}{2}S_{n+1}+\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}S_{n+1}-\frac{1}{2}S_n$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)$

즉 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$

$\frac{1}{2}a_{n+1}=a_n$ $\therefore a_{n+1}=2a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=3$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=3\times2^{n-1}$

$\therefore a_6=3\times2^5=96$ 답 ⑤

10 주어진 그림에서

$a_2=a_1+4$

$a_3=a_2+7$

$a_4=a_3+10$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+\{4+(n-1)\times3\}=a_n+3n+1$

따라서 $f(n)=3n+1$이므로

$f(10)=3\times10+1=31$ 답 ②

11 조건 (가), (나)에서

$p(1)$, $p(2)$, $p(2^2)$, $p(2^3)$, …이 참이다.

조건 (가), (다)에서

$p(1)$, $p(7)$, $p(7^2)$, $p(7^3)$, …이 참이다. 또

$p(2)$, $p(2\times7)$, $p(2\times7^2)$, $p(2\times7^3)$, …이 참이다.

$p(2^2)$, $p(2^2\times7)$, $p(2^2\times7^2)$, $p(2^2\times7^3)$, …이 참이다.

⋮

즉 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $p(2^a\times7^b)$이 참이다.

① $p(9)=p(3^2)$

② $p(42)=p(2\times3\times7)$

③ $p(70)=p(2\times5\times7)$

④ $p(98)=p(2\times7^2)$

⑤ $p(147)=p(3\times7^2)$

따라서 반드시 참인 명제는 $p(98)$이다. 답 ④

12 (ii) $n=k$ $(k\geq1)$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+4+\cdots+2^{k-1}=\boxed{2^k-1}$ …… ㉡

등식 ㉡의 양변에 $\boxed{2^k}$을 더하면

$1+2+4+\cdots+2^{k-1}+\boxed{2^k}=\boxed{2^k-1}+\boxed{2^k}$

$=2\times2^k-1$

$=\boxed{2^{k+1}-1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k)=2^k-1$, $g(k)=2^k$, $h(k)=2^{k+1}-1$이므로

$f(3)=2^3-1=7$, $g(2)=2^2=4$, $h(1)=2^2-1=3$

$\therefore f(3)+g(2)+h(1)=7+4+3=14$ 답 ④

13 (i) $n=\boxed{2}$일 때

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

따라서 (좌변)$>$(우변)이므로 $n=\boxed{2}$일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ …… ㉡

부등식 ㉡의 양변에 $\boxed{1+h}$를 곱하면 $\boxed{1+h}>0$이므로

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(\boxed{1+h})$

$=1+(k+1)h+kh^2$

$>1+(\boxed{k+1})h$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

즉 $p=2$, $f(h)=1+h$, $g(k)=k+1$이므로

$f(p)=f(2)=1+2=3$, $g(2p)=g(4)=4+1=5$

$\therefore f(p)+g(2p)=3+5=8$ 답 ⑤

기출 Best | 2회 p.125~127

01 $a_{n+1}-a_n=-4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=4$이므로 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\times(-4)=-4n+8$

$a_k=-72$에서

$-4k+8=-72$, $-4k=-80$

$\therefore k=20$ 답 ①

02 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$에서 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $a_2=\frac{1}{2}a_1$에서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{1}{2}$이다.

이때 $a_4=192$이므로

$a_7=a_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=24$ 답 ②

다른풀이 $a_4=a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=192$에서

$a_1=1536$

따라서 $a_n=1536\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_7=1536\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=24$

03 $a_{n+1}-a_n=6n^2$, 즉 $a_{n+1}=a_n+6n^2$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+6\times1^2$

$a_3=a_2+6\times2^2=a_1+6\times1^2+6\times2^2$

$=a_1+6\times(1^2+2^2)$

$a_4=a_3+6\times3^2=a_1+6\times(1^2+2^2)+6\times3^2$

$=a_1+6\times(1^2+2^2+3^2)$

⋮

$a_{10}=a_1+6\times(1^2+2^2+3^3+\cdots+9^2)$

$=2+6\times\frac{9\times10\times19}{6}=1712$ 답 ③

04 $a_{n+1}=9^n a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례로 대입하면

$a_2=9a_1$

$a_3=9^2a_2=9^2\times 9a_1=9^{1+2}a_1$

$a_4=9^3a_3=9^3\times 9^{1+2}a_1=9^{1+2+3}a_1$

⋮

$a_{20}=9^{1+2+3+\cdots+19}a_1$

$=9^{\frac{19\times 20}{2}}\times 1=9^{190}$

$\therefore \log_3 a_{20}=\log_3 9^{190}=\log_3 3^{380}=380$ 답 ⑤

05 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1=2\times 2=4$

$a_3=\frac{3}{2}a_2=\frac{3}{2}\times 4=6$

$a_4=\frac{4}{3}a_3=\frac{4}{3}\times 6=8$

$a_5=\frac{5}{4}a_4=\frac{5}{4}\times 8=10$

따라서 $a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5=2\times 4\times 6\times 8\times 10=3840$이므로 3840을 50으로 나누었을 때의 나머지는 40이다. 답 ⑤

06 (i) a_2가 짝수일 때

$a_3=\frac{a_2^{\,2}}{4}$이므로 $a_2+a_3=30$에서

$a_2+\frac{a_2^{\,2}}{4}=30$, $4a_2+a_2^{\,2}=120$, $a_2^{\,2}+4a_2-120=0$

$\therefore a_2=-2\pm 2\sqrt{31}$

그런데 a_2는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a_2가 홀수일 때

$a_3=\frac{a_2^{\,2}+3}{4}$이므로 $a_2+a_3=30$에서

$a_2+\frac{a_2^{\,2}+3}{4}=30$, $4a_2+a_2^{\,2}+3=120$

$a_2^{\,2}+4a_2-117=0$, $(a_2+13)(a_2-9)=0$

$\therefore a_2=9$ ($\because a_2$는 자연수)

따라서 $a_3=30-a_2=30-9=21$이므로

$a_4=\frac{a_3^{\,2}+3}{4}=\frac{21^2+3}{4}=111$

(i), (ii)에서 $a_4=111$ 답 ⑤

07 $a_{2n+1}+a_{2n-1}=2n+3$에서 $a_{2n+1}=-a_{2n-1}+2n+3$

n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_3=-a_1+2\times 1+3=-a_1+5$

$a_5=-a_3+2\times 2+3=-(-a_1+5)+2\times 2+3=a_1+2$

$a_7=-a_5+2\times 3+3=-(a_1+2)+2\times 3+3=-a_1+7$

$a_9=-a_7+2\times 4+3=-(-a_1+7)+2\times 4+3=a_1+4$

$a_{11}=-a_9+2\times 5+3=-(a_1+4)+2\times 5+3=-a_1+9$

이때 $a_{11}=0$이므로 $-a_1+9=0$

$\therefore a_1=9$ 답 ②

다른풀이 $a_{2n+1}+a_{2n-1}=2n+3$의 n에 5, 4, 3, 2, 1을 차례로 대입하면

$a_{11}+a_9=2\times 5+3=13$ …… ㉠

$a_9+a_7=2\times 4+3=11$ …… ㉡

$a_7+a_5=2\times 3+3=9$ …… ㉢

$a_5+a_3=2\times 2+3=7$ …… ㉣

$a_3+a_1=2\times 1+3=5$ …… ㉤

㉠−㉡+㉢−㉣+㉤을 하면

$(a_{11}+a_9)-(a_9+a_7)+(a_7+a_5)-(a_5+a_3)+(a_3+a_1)$

$=13-11+9-7+5$

즉 $a_{11}+a_1=9$

$\therefore a_1=9$ ($\because a_{11}=0$)

08 $a_{n+1}=(-1)^n a_n+1$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=(-1)^1a_1+1=-1\times 2+1=-1$

$a_3=(-1)^2a_2+1=1\times(-1)+1=0$

$a_4=(-1)^3a_3+1=-1\times 0+1=1$

$a_5=(-1)^4a_4+1=1\times 1+1=2$

$a_6=(-1)^5a_5+1=-1\times 2+1=-1$

$a_7=(-1)^6a_6+1=1\times(-1)+1=0$

$a_8=(-1)^7a_7+1=-1\times 0+1=1$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, −1, 0, 1이 이 순서대로 반복되는 수열이다.

이때 $70=4\times 17+2$이므로

$a_{70}=a_2=-1$ 답 ②

09 $S_n=\frac{3}{4}a_n+2$ …… ㉠

에서

$S_{n+1}=\frac{3}{4}a_{n+1}+2$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$S_{n+1}-S_n=\frac{3}{4}a_{n+1}-\frac{3}{4}a_n$

$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_{n+1}-\frac{3}{4}a_n$

$\frac{1}{4}a_{n+1}=-\frac{3}{4}a_n$ $\therefore a_{n+1}=-3a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공비가 −3인 등비수열이므로

$a_n=8\times(-3)^{n-1}$

$\therefore a_5=8\times(-3)^4=648$ 답 ④

10 주어진 그림에서

$a_2=a_1+6$

$a_3=a_2+8$

$a_4=a_3+10$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+\{6+(n-1)\times 2\}$

$=a_n+2n+4$

따라서 $f(n)=2n+4$이므로

$f(20)=2\times20+4=44$ 답 ②

11 ㄱ. $p(1)$이 참이면 $p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, $p(13)$, …이 참이다.
그러나 $p(12)$가 참인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $p(2)$가 참이면 $p(5)$, $p(8)$, $p(11)$, …이 참이다.
즉 모든 자연수 n에 대하여 $p(3n-1)$이 참이다. (참)

ㄷ. $p(1)$이 참이므로 $p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, …이 참이다.
$p(2)$가 참이므로 $p(5)$, $p(8)$, $p(11)$, …이 참이다.
$p(3)$이 참이므로 $p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, …가 참이다.
즉 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

12 (ii) $n=k$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

$n=k+1$일 때 등식 ㉠에서

$$1\times(k+1)+2\times k+3\times(k-1)+\cdots+k\times2+(k+1)\times1$$
$$=1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+k\times1+(1+2+3+\cdots+k)+\boxed{k+1}$$
$$=1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+k\times1+\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{k^2+3k+2}{2}$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k)=k+1$, $g(k)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$이므로

$f(10)=10+1=11$, $g(8)=\frac{9\times10}{2}=45$

$\therefore f(10)+g(8)=11+45=56$ 답 ④

13 (ii) $n=k$ $(k\geq5)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$ …… ㉡

부등식 ㉡의 양변에 $\boxed{2}$를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$

그런데 $k\geq5$에서

$2k^2-(k+1)^2=(k-1)^2-2\geq14>0$

즉 $2k^2>(\boxed{k+1})^2$이므로

$2^{k+1}>2k^2>(\boxed{k+1})^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

즉 $p=2$, $f(k)=k+1$이므로

$f(p)=f(2)=2+1=3$ 답 ③

변형유형 집중공략

p.128~129

1-1 $a_2=a_1+3$
$a_3=a_2+5$
$a_4=a_3+7$
⋮
$\therefore a_{n+1}=a_n+\{3+(n-1)\times2\}=a_n+2n+1$
따라서 $f(n)=2n+1$이므로
$f(40)=2\times40+1=81$ 답 81

1-2 $a_2=a_1+4$
$a_3=a_2+8$
$a_4=a_3+12$
⋮
$\therefore a_{n+1}=a_n+\{4+(n-1)\times4\}=a_n+4n$
따라서 $a_{n+1}-a_n=4n$이므로 $a_{m+1}-a_m=200$에서
$4m=200$ $\therefore m=50$ 답 50

2-1 시행을 n회 반복한 후 그릇 A에 담긴 물의 양이 a_n L이므로
그릇 B에 담긴 물의 양은 $(20-a_n)$ L이다.
이때 시행을 $(n+1)$회 반복한 후 그릇 A에 담긴 물의 양은 a_{n+1} L이므로

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\left\{(20-a_n)+\frac{1}{4}a_n\right\}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{9}{16}a_n+5$$

따라서 $p=\frac{9}{16}$, $q=5$이므로

$pq=\frac{9}{16}\times5=\frac{45}{16}$ 답 ①

2-2 덜어 내는 소금물의 양과 다시 넣는 소금물의 양이 50 g으로 동일하므로 전체 소금물의 양은 100 g으로 일정하다.
농도가 20 %인 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{20}{100}\times50=10$(g)

농도가 10 %인 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{10}{100}\times50=5$(g)

이므로

$a_1=\frac{10+5}{100}\times100=15$(%)

$\therefore p=15$

농도가 a_n %인 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{a_n}{100}\times50=\frac{1}{2}a_n$(g)

농도가 10 %인 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은 5 g이므로

$$a_{n+1}=\frac{\frac{1}{2}a_n+5}{100}\times 100=\frac{1}{2}a_n+5\,(\%)$$

$\therefore q=5$

$\therefore p+q=15+5=20$ 답 20

서술형 What & How p.130~131

1 $a_1=6>0$이므로 $a_2=2-a_1=2-6=-4$

$a_2<0$이므로 $a_3=a_2+p=-4+p$ …… ❶

(i) $a_3=-4+p\geq 0$, 즉 $p\geq 4$일 때

$a_4=2-a_3=2-(-4+p)=6-p$

$a_4=0$에서 $6-p=0$ $\therefore p=6$

이때 $p=6$은 $p\geq 4$를 만족시킨다. …… ❷

(ii) $a_3=-4+p<0$, 즉 $p<4$일 때

$a_4=a_3+p=(-4+p)+p=-4+2p$

$a_4=0$에서 $-4+2p=0$, $2p=4$ $\therefore p=2$

이때 $p=2$는 $p<4$를 만족시킨다. …… ❸

(i), (ii)에서 $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 곱은

$6\times 2=12$ …… ❹

답 12

2 $1<a_1<2$에서 $a_1>0$이므로 $a_2=2a_1-3$

$1<a_1<2$에서 $2<2a_1<4$, $-1<2a_1-3<1$이므로

$-1<a_2<1$ …… ❶

(i) $-1<a_2<0$일 때

$a_3=-2a_2=-2(2a_1-3)=-4a_1+6$

이때 $a_3=1$이므로

$-4a_1+6=1$, $4a_1=5$ $\therefore a_1=\frac{5}{4}$

이때 $a_1=\frac{5}{4}$는 $1<a_1<2$를 만족시킨다. …… ❷

(ii) $0\leq a_2<1$일 때

$a_3=2a_2-3=2(2a_1-3)-3=4a_1-9$

이때 $a_3=1$이므로

$4a_1-9=1$, $4a_1=10$ $\therefore a_1=\frac{5}{2}$

그런데 $a_1=\frac{5}{2}$는 $1<a_1<2$를 만족시키지 않는다. …… ❸

(i), (ii)에서 $a_1=\frac{5}{4}$

$\therefore 100a_1=100\times\frac{5}{4}=125$ …… ❹

답 125

채점기준	배점
❶ a_2를 a_1에 대한 식으로 나타내고, a_2의 값의 범위 구하기	2
❷ $-1<a_2<0$일 때 a_1의 값 구하기	2
❸ $0\leq a_2<1$일 때 a_1의 값 구하기	2
❹ 조건에 맞는 a_1의 값을 구하고 $100a_1$의 값 구하기	1

3 $a_1=9$, $a_2=3$이므로 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=3-9=-6$

$a_4=a_3-a_2=-6-3=-9$

$a_5=a_4-a_3=-9-(-6)=-3$

$a_6=a_5-a_4=-3-(-9)=6$

$a_7=a_6-a_5=6-(-3)=9$

$a_8=a_7-a_6=9-6=3$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 9, 3, −6, −9, −3, 6이 이 순서대로 반복되는 수열이다. …… ❶

따라서 $|a_k|=3$, 즉 $a_k=3$ 또는 $a_k=-3$을 만족시키는 k의 값은

2, 5, 8, 11, … …… ❷

이고, 이 수열은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 이 수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$ …… ❸

따라서 $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수는 수열 $\{b_n\}$의 100 이하의 항의 개수와 같으므로

$3n-1\leq 100$에서 $3n\leq 101$ $\therefore n\leq\frac{101}{3}=33.666\cdots$

즉 수열 $\{b_n\}$의 100 이하의 항의 개수는 33이므로 구하는 자연수의 개수는 33이다. …… ❹

답 33

4 $a_1=3$

$a_2=\frac{a_1+93}{2}=\frac{3+93}{2}=48$

$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{48}{2}=24$

$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{24}{2}=12$

$a_5=\frac{a_4}{2}=\frac{12}{2}=6$

$a_6=\frac{a_5}{2}=\frac{6}{2}=3$

$a_7=\frac{a_6+93}{2}=\frac{3+93}{2}=48$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 3, 48, 24, 12, 6이 이 순서대로 반복되는 수열이다. …… ❶

따라서 $a_k=3$을 만족시키는 자연수 k의 값은

1, 6, 11, 16, … …… ❷

이고, 이 수열은 첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열이므로 이 수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n=1+(n-1)\times 5=5n-4$

따라서 $a_k=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수는 수열 $\{b_n\}$의 100 이하의 항의 개수와 같으므로

$5n-4\leq 100$에서 $5n\leq 104$ $\therefore n\leq\frac{104}{5}=20.8$

즉 수열 $\{b_n\}$의 100 이하의 항의 개수는 20이다. …… ❸

따라서 구하는 자연수 k의 값의 합은

$\sum_{k=1}^{20}(5k-4)=5\times\frac{20\times21}{2}-4\times20=970$ …… ❹

답 970

채점기준	배점
❶ a_2, a_3, a_4, …의 값을 구하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙 찾기	2
❷ $a_k=3$을 만족시키는 k의 값 구하기	2
❸ 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수 구하기	2
❹ 조건을 만족시키는 자연수 k의 값의 합 구하기	2

실전 문제 | 1회 p.132~135

01 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $a_1=1$, 공차는 $a_2-a_1=5-1=4$이므로

$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

$\therefore a_{100}=4\times100-3=397$ 답 ②

02 x에 대한 이차방정식 $a_nx^2-2\sqrt{a_{n+1}}x+3=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{a_{n+1}})^2-3a_n=0$ $\therefore a_{n+1}=3a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1$, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$

$\therefore a_5=3^4=81$ 답 ④

03 $a_{n+1}=a_n+2$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

${b_{n+1}}^2=b_nb_{n+2}$에서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=2$, 공비가 $\frac{b_2}{b_1}=3$인 등비수열이므로

$b_n=2\times3^{n-1}$

따라서 $a_{122}=2\times122-1=243$, $b_{10}=2\times3^9$이므로

$\frac{b_{10}}{a_{122}}=\frac{2\times3^9}{243}=162$ 답 ①

04 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+2)(n+4)}$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+\frac{1}{3\times5}$

$a_3=a_2+\frac{1}{4\times6}=a_1+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}$

$a_4=a_3+\frac{1}{5\times7}=a_1+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{5\times7}$

⋮

$\therefore a_{10}=a_1+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{11\times13}$

$=a_1+\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{(k+2)(k+4)}$

$=a_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)\right\}$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$

$=\frac{35}{104}$ 답 ④

05 $(n+2)a_{n+1}=na_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{3}a_1$

$a_3=\frac{2}{4}a_2=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}a_1$

$a_4=\frac{3}{5}a_3=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}a_1$

⋮

$\therefore a_n=\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}a_1$

$=\frac{2}{n(n+1)}a_1=\frac{2}{n(n+1)}\times1=\frac{2}{n(n+1)}$

$a_k=\frac{1}{28}$에서 $\frac{2}{k(k+1)}=\frac{1}{28}$

$k(k+1)=56$, $k^2+k-56=0$

$(k+8)(k-7)=0$

이때 k는 자연수이므로 $k=7$ 답 ②

06 $a_{n+1}=a_n+3n+1$ …… ㉠

㉠의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3\times1+1=3+3\times1+1=7$

$a_3=a_2+3\times2+1=7+3\times2+1=14$

$a_4=a_3+3\times3+1=14+3\times3+1=24$

$\therefore A=24$

또 ㉠의 n에 19, 18을 차례로 대입하면

$a_{20}=a_{19}+3\times19+1=a_{19}+58$

$a_{19}=a_{18}+3\times18+1=a_{18}+55$

두 식의 양변을 각각 더하면

$a_{20}+a_{19}=a_{19}+a_{18}+113$

$a_{20}-a_{18}=113$, 즉 $B=113$

$\therefore A+B=24+113=137$ 답 ⑤

07 $a_1=\frac{1}{5}$

$a_2=2a_1=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$a_3=2a_2=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

$a_4=2a_3=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$

$a_5=-a_4+3=-\frac{8}{5}+3=\frac{7}{5}$

$a_6=-a_5+3=-\frac{7}{5}+3=\frac{8}{5}$

$a_7=-a_6+3=-\frac{8}{5}+3=\frac{7}{5}$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{5}$, $a_2=\frac{2}{5}$, $a_3=\frac{4}{5}$이고, $n\geq2$인 자연수 n에 대하여 $a_{2n}=\frac{8}{5}$, $a_{2n+1}=\frac{7}{5}$이므로

$a_{215}+a_{216}=\frac{7}{5}+\frac{8}{5}=3$ 답 ⑤

08 $(2n+3)a_n+2S_n=\frac{2}{5}$ ····· ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$5a_1+2S_1=\frac{2}{5}$, $5a_1+2a_1=\frac{2}{5}$ ($\because a_1=S_1$)

$7a_1=\frac{2}{5}$ $\therefore a_1=\frac{2}{35}$

또 ㉠에서

$(2n+5)a_{n+1}+2S_{n+1}=\frac{2}{5}$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$(2n+5)a_{n+1}-(2n+3)a_n+2S_{n+1}-2S_n=0$

$(2n+5)a_{n+1}-(2n+3)a_n+2(S_{n+1}-S_n)=0$

$(2n+5)a_{n+1}-(2n+3)a_n+2a_{n+1}=0$ ($\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$)

$(2n+7)a_{n+1}-(2n+3)a_n=0$

$(2n+7)a_{n+1}=(2n+3)a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{2n+3}{2n+7}a_n$

즉 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+3}{2n+7}$이므로

$\frac{a_{22}}{a_{21}}=\frac{2\times21+3}{2\times21+7}=\frac{45}{49}$

$\therefore \frac{a_1\times a_{22}}{a_{21}}=\frac{2}{35}\times\frac{45}{49}=\frac{18}{343}$ 답 ②

09 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

이므로 조건 ㈏에서 $a_{n+1}-a_1=3n+1$

$\therefore a_{n+1}=3n+1+a_1$

이 등식에 $n=3$을 대입하면

$a_4=3\times3+1+a_1$, $12=10+a_1$ ($\because$ 조건 ㈎)

$\therefore a_1=2$ ····· ㉠

$\therefore a_{n+1}=3n+3$ ····· ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 3n & (n\geq2)\end{cases}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k=2+\sum_{k=2}^{10}3k=2+\sum_{k=1}^{10}3k-3$

$=2+3\times\frac{10\times11}{2}-3=164$ 답 ⑤

10 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=7$, $a_4=11$이고, n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다. 즉 $(n+1)$개의 직선에 의하여 분할된 평면은 n개의 직선에 의하여 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+n+1$

$a_{n+1}=a_n+n+1$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3=a_1+2+3$

$a_4=a_3+4=a_1+2+3+4$

⋮

$\therefore a_{10}=a_1+2+3+4+\cdots+10$

$=a_1+\sum_{k=1}^{9}(k+1)=2+\frac{9\times10}{2}+9=56$ 답 ④

11 조건 ㈏에서 n에 1, 2, 3, 4를 대입하면

$a_3=2a_1=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$a_4=2a_2=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$a_5=2a_3=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$a_6=2a_4=2\times\frac{1}{2}=1$

조건 ㈐에서

$a_1=a_7=a_{13}=a_{19}=\cdots=a_{355}=\cdots=\frac{1}{6}$

$a_2=a_8=a_{14}=a_{20}=\cdots=a_{356}=\cdots=\frac{1}{4}$

$a_3=a_9=a_{15}=a_{21}=\cdots=a_{357}=\cdots=\frac{1}{3}$

$a_4=a_{10}=a_{16}=a_{22}=\cdots=a_{358}=\cdots=\frac{1}{2}$

$a_5=a_{11}=a_{17}=a_{23}=\cdots=a_{359}=\cdots=\frac{2}{3}$

$a_6=a_{12}=a_{18}=a_{24}=\cdots=a_{360}=\cdots=1$

이므로

$\sum_{k=1}^{360}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{360}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)+(a_7+a_8+a_9+\cdots+a_{12})$

$+\cdots+(a_{355}+a_{356}+a_{357}+\cdots+a_{360})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)$

$+\cdots+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)\times60$

$=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\times60$

$=\frac{35}{12}\times60=175$ 답 ①

12 명제 $p(2)$가 성립하고, 명제 $p(k)$가 성립하면 명제 $p(2k-1)$도 성립하므로 명제

$p(2\times2-1)=p(3)$

$p(2\times3-1)=p(5)$

$p(2\times5-1)=p(9)$

$p(2\times9-1)=p(17)$

$p(2\times17-1)=p(33)$

$p(2\times33-1)=p(65)$

$p(2\times65-1)=p(129)$

$\vdots$

도 성립한다.

따라서 명제 $p(n)$이 성립하는 두 자리 자연수 n의 최댓값은 65이다. 답 ③

13 (ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

부등식 ㉡의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\boxed{\frac{1}{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$$

$$=\frac{k+k(k+1)-(k+1)^2}{k(k+1)^2}$$

$$=\frac{\boxed{-1}}{k(k+1)^2}<0\ (\because k\geq2)$$

이므로

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\boxed{\frac{1}{k+1}} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에서

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\boxed{\frac{1}{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k)=\frac{1}{k+1}$, $a=-1$이고

$f(2)=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

$\therefore f(2)-a=\frac{1}{3}-(-1)=\frac{4}{3}$ 답 ②

14 (ii) $n=k$일 때 n^3+5n이 6의 배수라 가정하면

$k^3+5k=6m$ (m은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$(k+1)^3+5(k+1)=\boxed{k^3+3k^2}+8k+6$

$=k^3+5k+6+3k^2+3k$

$=6m+6+3k^2+3k$

$=6(m+1)+3k(k+1)$

이고, $k(k+1)$은 연속된 두 자연수의 곱이므로 2의 배수, 즉 $3k(k+1)$은 $\boxed{6}$의 배수이다. 또 $6(m+1)$도 6의 배수이므로 $(k+1)^3+5(k+1)$은 6의 배수이다.

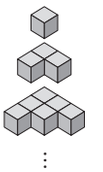
따라서 $n=k+1$일 때도 n^3+5n은 6의 배수이다.

즉 $f(k)=k^3+3k^2$, $p=6$이고

$f(3)=3^3+3\times3^2=54$

$\therefore f(3)+p=54+6=60$ 답 ⑤

15 n층의 탑을 만들 때 각 층에 사용한 정육면체의 개수는



n층: 1

$(n-1)$층: 1+2

$(n-2)$층: 1+2+3

$(n-3)$층: 1+2+3+4

$\vdots$

2층: $1+2+3+\cdots+(n-1)$

1층: $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

이때 $a_m=120$이므로

$\frac{m(m+1)(m+2)}{6}=120$

$m(m+1)(m+2)=720=8\times9\times10$

$\therefore m=8$ 답 ②

16 길이가 3인 막대를 삼등분하여 가운데 부분을 잘라 내면 남은 막대의 길이의 합은

$a_1=3\times\frac{2}{3}=2$

$(n+1)$회 시행 후 남은 막대의 길이의 합 a_{n+1}은 a_n의 $\frac{2}{3}$배이므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

따라서 $a_{30}=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{29}=\frac{2^{30}}{3^{29}}$이므로

$m=29$, $n=30$

$\therefore m+n=29+30=59$ 답 ③

17 ${a_{n+1}}^2+a_{n+1}={a_n}^2+a_n$에서

${a_{n+1}}^2-{a_n}^2+a_{n+1}-a_n=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+1}-a_n)=0$
$(a_{n+1}+a_n+1)(a_{n+1}-a_n)=0$
$a_{n+1}+a_n+1=0$ ($\because a_n \neq a_{n+1}$에서 $a_{n+1}-a_n \neq 0$)
$\therefore a_{n+1}=-a_n-1$ …… ❶
이 등식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면
$a_2=-a_1-1=-3-1=-4$
$a_3=-a_2-1=-(-4)-1=3$
$a_4=-a_3-1=-3-1=-4$
$a_5=-a_4-1=-(-4)-1=3$
⋮
따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, -4가 이 순서대로 반복되는 수열이다. …… ❷

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40}$
$=(-4)+(-4)+(-4)+\cdots+(-4)$
$=(-4)\times 20=-80$ …… ❸

답 -80

채점기준	배점
❶ a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식 구하기	2
❷ ❶의 관계식에 $n=1, 2, 3, \ldots$을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙 찾기	2
❸ $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$의 값 구하기	2

18 $a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면
$a_2=2a_1=2\times 1=2!$
$a_3=3a_2=3\times 2\times 1=3!$
$a_4=4a_3=4\times 3\times 2\times 1=4!$
⋮
$\therefore a_n=n!$ …… ❶
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}=1!+2!+3!+\cdots+30!$
이때 $5!=120$이므로 5!, 6!, 7!, …, 30!은 모두 30으로 나누어떨어진다. 즉 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}$을 30으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 30으로 나누었을 때의 나머지와 같다. 이때 $1!+2!+3!+4!=1+2+6+24=33$이므로 구하는 나머지는 3이다. …… ❷

답 3

채점기준	배점
❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n 구하기	3
❷ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}$을 30으로 나누었을 때의 나머지 구하기	3

실전 문제 | 2회 p.136~139

01 $a_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+2}}$에서 ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. 이때 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $a_1=1$, 공비는 $\frac{a_2}{a_1}=2$이므로
$a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$, $S_n=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$
$S_m>2048$에서 $2^m-1>2048$ $\therefore 2^m>2049$
이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 구하는 자연수 m의 최솟값은 12이다. 답 ④

02 $a_{n+1}=a_n-4n+3$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면
$a_2=a_1-4\times 1+3=20-4\times 1+3=19$
$a_3=a_2-4\times 2+3=19-4\times 2+3=14$
$a_4=a_3-4\times 3+3=14-4\times 3+3=5$
$\therefore a_5=a_4-4\times 4+3=5-4\times 4+3=-8$ 답 ③

03 $a_{n+1}=\frac{4n+3}{4n-1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 24를 차례로 대입하면
$a_2=\frac{7}{3}a_1$
$a_3=\frac{11}{7}a_2=\frac{11}{7}\times\frac{7}{3}\times a_1$
$a_4=\frac{15}{11}a_3=\frac{15}{11}\times\frac{11}{7}\times\frac{7}{3}\times a_1$
⋮
$\therefore a_{25}=\frac{99}{95}a_{24}=\frac{99}{95}\times\frac{95}{91}\times\frac{91}{87}\times\cdots\times\frac{15}{11}\times\frac{11}{7}\times\frac{7}{3}\times a_1$
$=\frac{99}{3}a_1=\frac{99}{3}\times 1=33$ 답 ①

04 ㄱ. $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면
$a_3=a_1+a_2=1+1=2$
$a_4=a_2+a_3=1+2=3$
$a_5=a_3+a_4=2+3=5$
⋮
즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항, 둘째항이 각각 1이고 점점 커지는 수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 음수인 항은 존재하지 않는다.
ㄴ. $a_n-a_{n+1}=5$에서 $a_{n+1}-a_n=-5$
즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6, 공차가 -5인 등차수열이므로
$a_n=6+(n-1)\times(-5)=-5n+11$
이때 $a_3=-5\times 3+11=-4$이므로 수열 $\{a_n\}$의 음수인 항이 존재한다.
ㄷ. $3a_n+a_{n+1}=7$에서 $a_{n+1}=-3a_n+7$ …… ㉠
㉠의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면
$a_2=-3a_1+7=-3\times 2+7=1$
$a_3=-3a_2+7=-3\times 1+7=4$
$a_4=-3a_3+7=-3\times 4+7=-5$
이므로 수열 $\{a_n\}$의 음수인 항이 존재한다.
따라서 음수인 항이 존재하는 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

05 조건 (가), (나)에서
$a_{20}=a_{2\times 10}=a_{10}-1$, 즉 $1=a_{10}-1$이므로
$a_{10}=2$

$a_{10}=a_{2\times5}=a_5-1$, 즉 $2=a_5-1$이므로

$a_5=3$

$a_5=a_{2\times2+1}=2a_2+1$, 즉 $3=2a_2+1$이므로

$2a_2=2 \quad \therefore a_2=1$

$a_2=a_{2\times1}=a_1-1$, 즉 $1=a_1-1$이므로

$a_1=2$ 답 ④

06 $S_{n+2}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

이므로

$(S_{n+2}-S_n)^2=4a_{n+2}a_{n+1}+4$에서

$(a_{n+2}+a_{n+1})^2=4a_{n+2}a_{n+1}+4$

$a_{n+2}^2+2a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}^2=4a_{n+2}a_{n+1}+4$

$a_{n+2}^2-2a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}^2=4$

$(a_{n+2}-a_{n+1})^2=4$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=2$ ($\because a_{n+2}>a_{n+1}$)

이때 $a_2-a_1=5-3=2$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=2$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=3$, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

$\therefore a_{15}=2\times15+1=31$ 답 ②

07 $a_{n+1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n$ ····· ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_1=1 \quad \therefore p=1$

또 ㉠에서

$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}$ $(n\geq2)$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a_{n+1}=a_n+na_n$ $(n\geq2)$

$\therefore a_{n+1}=(n+1)a_n$ $(n\geq2)$ ····· ㉡

㉡의 n에 2, 3, 4, …, 9를 차례로 대입하면

$a_3=3a_2$

$a_4=4a_3=4\times3\times a_2$

$a_5=5a_4=5\times4\times3\times a_2$

$a_6=6a_5=6\times5\times4\times3\times a_2$

⋮

$a_{10}=10a_9=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times a_2$

$=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times1$ ($\because a_2=1$)

$=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2}$

$=\dfrac{10!}{2}$

따라서 $q=2$이므로

$p+q=1+2=3$ 답 ①

08 조건 (나)의 $a_{2n+2}-a_{2n}=2$에서

$a_{2n+2}=a_{2n}+2$ ····· ㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, …, 24를 차례로 대입하면

$a_4=a_2+2=1+2=3$

$a_6=a_4+2=3+2=5$

$a_8=a_6+2=5+2=7$

$a_{10}=a_8+2=7+2=9$

⋮

$a_{50}=a_{48}+2=47+2=49$

또 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=0$에서 $a_{2n+1}=a_{2n-1}$이므로

$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2n-1}=a_{2n+1}=\cdots=1$

$\therefore a_{55}=1$

$\therefore a_{50}+a_{55}=49+1=50$ 답 ①

09 $6S_n=a_n^2+3a_n-4$ ····· ㉠

에서

$6S_{n+1}=a_{n+1}^2+3a_{n+1}-4$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$6S_{n+1}-6S_n=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$

$6(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$

$6a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$ ($\because S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$)

$a_{n+1}^2-a_n^2-3a_{n+1}-3a_n=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)-3(a_{n+1}+a_n)=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$

$\therefore a_{n+1}-a_n-3=0$ ($\because a_n>0$, $a_{n+1}>0$)

$\therefore a_{n+1}=a_n+3$

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

한편 $S_1=a_1$이므로 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$6S_1=a_1^2+3a_1-4$

$6a_1=a_1^2+3a_1-4$

$a_1^2-3a_1-4=0$, $(a_1+1)(a_1-4)=0$

$\therefore a_1=4$ ($\because a_1>0$)

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$

$\therefore a_8=3\times8+1=25$ 답 ③

10 ㄱ. [반례] $p=2$일 때

$a_2=a_1+1=0+1=1$, $a_1=0$이므로

$a_2\neq2a_1$

즉 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}=2a_n$인 것은 아니다. (거짓)

ㄴ. $a_1=0$

$a_2=a_1+1=0+1=1$

$a_3=a_2+1=1+1=2$

$a_4=a_3+1=2+1=3$

⋮

$a_p=a_{p-1}+1=(p-2)+1=p-1$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p=0+1+2+\cdots+(p-1)$

$=\dfrac{p(p-1)}{2}$ (참)

ㄷ. $a_p=p-1$

$a_{2p}=a_{p+p}=a_p=p-1$

$a_{3p}=a_{2p+p}=a_{2p}=p-1$

$a_{4p}=a_{3p+p}=a_{3p}=p-1$

⋮

$a_{mp}=p-1$

$\therefore a_p+a_{2p}+a_{3p}+\cdots+a_{mp}$

$=\underbrace{(p-1)+(p-1)+(p-1)+\cdots+(p-1)}_{m\text{개}}$

$=m(p-1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

11 $a_1=6$

$a_2=a_1+9=a_1+3\times3$

$a_3=a_2+12=a_2+3\times4$

$a_4=a_3+15=a_3+3\times5$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+3\times(n+2)=a_n+3n+6$

따라서 $p=3$, $q=6$이므로

$p-q=3-6=-3$ 답 ②

12 $a_1=1$

$a_2=-\dfrac{4}{a_1-2}=-\dfrac{4}{1-2}=4$

$a_3=-\dfrac{4}{a_2-2}=-\dfrac{4}{4-2}=-2$

$a_4=-\dfrac{4}{a_3-2}=-\dfrac{4}{-2-2}=1$

$a_5=-\dfrac{4}{a_4-2}=-\dfrac{4}{1-2}=4$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 1, 4, -2가 이 순서대로 반복되는 수열이다.

따라서 자연수 k에 대하여

$a_1=a_4=a_7=\cdots=a_{3k-2}=\cdots=1$

$a_2=a_5=a_8=\cdots=a_{3k-1}=\cdots=4$

$a_3=a_6=a_9=\cdots=a_{3k}=\cdots=-2$

이므로

$S_{3k}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)$

$+\cdots+(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$=\{1+4+(-2)\}+\{1+4+(-2)\}+\{1+4+(-2)\}$

$+\cdots+\{1+4+(-2)\}$

$=\{1+4+(-2)\}\times k$

$=3k$

$S_{3k-1}=S_{3k}-a_{3k}=S_{3k}-(-2)=3k+2$

$S_{3k-2}=S_{3k}-a_{3k}-a_{3k-1}$

$=3k-(-2)-4=3k-2$

이때 $S_m=17$이고 m은 자연수이어야 하므로 $S_{3k-1}=3k+2=17$에서

$3k=15$ $\therefore k=5$

따라서 $S_{3\times5-1}=3\times5+2$, 즉 $S_{14}=17$이므로

$m=14$ 답 ⑤

참고 자연수 k에 대하여

$S_{3k}=3k$, $S_{3k-1}=3k+2$, $S_{3k-2}=3k-2$

이므로

$S_n=\begin{cases} n & (n\text{은 3으로 나누었을 때 나머지가 0 또는 1인 수}) \\ n+3 & (n\text{은 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수}) \end{cases}$

13 (ii) $n=m$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\times\dfrac{m(m+1)}{2}$

$n=m+1$일 때

$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2$

$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(-1)^{m+2}\times(m+1)^2}$

$=\boxed{(-1)^{m+1}\times\dfrac{m(m+1)}{2}}+\boxed{(-1)^{m+2}\times(m+1)^2}$

$=(-1)^{m+3}\times\dfrac{m(m+1)}{2}+(-1)^{m+2}\times(m+1)^2$

$=(-1)^{m+2}\times\dfrac{m+1}{2}\{-m+2(m+1)\}$

$=(-1)^{m+2}\times\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

따라서 $n=m+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

즉 $f(m)=(-1)^{m+2}\times(m+1)^2$,

$g(m)=(-1)^{m+1}\times\dfrac{m(m+1)}{2}$이므로

$f(5)=(-1)^7\times6^2=-36$, $g(2)=(-1)^3\times\dfrac{2\times3}{2}=-3$

$\therefore \dfrac{f(5)}{g(2)}=\dfrac{-36}{-3}=12$ 답 ③

14 (i) $n=\boxed{3}$일 때

$\sum_{i=1}^{2}\dfrac{3}{2^{i-1}(3-i)}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=3<4$

따라서 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq3)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{k}{2^{i-1}(k-i)}<4$ ····· ㉡

$n=k+1$일 때

$\sum_{i=1}^{k}\dfrac{k+1}{2^{i-1}(k+1-i)}$

$=\boxed{\dfrac{k+1}{k}}+\sum_{i=2}^{k}\dfrac{k+1}{2^{i-1}(k+1-i)}$

$=\boxed{\dfrac{k+1}{k}}+\sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{k+1}{2^{i}(k-i)}$

$=\boxed{\dfrac{k+1}{k}}+\sum_{i=1}^{k-1}\left\{\dfrac{k}{2^{i-1}(k-i)}\times\dfrac{k+1}{2k}\right\}$

$=\boxed{\dfrac{k+1}{k}}+\boxed{\dfrac{k+1}{2k}}\sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{k}{2^{i-1}(k-i)}$

$$< \boxed{\frac{k+1}{k}} + \boxed{\frac{k+1}{2k}} \times 4 \ (\because \text{㉡})$$

$$= \frac{3k+3}{k} = 3 + \frac{3}{k} \le 3+1 \left(\because k \ge 3 \text{에서 } 0 < \frac{3}{k} \le 1\right)$$

$$= 4$$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

즉 $p=3$, $f(k)=\frac{k+1}{k}$, $g(k)=\frac{k+1}{2k}$이므로

$f(p)=f(3)=\frac{4}{3}$, $g(p)=g(3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore f(p)+g(p)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$ 답 ①

15 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 원 C_n의 둘레의 길이 a_n은

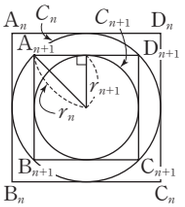
$a_n=2\pi r_n$

원 C_1의 반지름의 길이는 $r_1=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\times 2=1$이므로 원 C_1의 둘레의 길이는

$a_1=2\pi r_1=2\pi\times 1=2\pi$

$\therefore p=2$

한편 오른쪽 그림에서



$r_n=\sqrt{2}r_{n+1}$, 즉 $r_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$

이므로

$a_{n+1}=2\pi r_{n+1}=2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}r_n=\sqrt{2}\pi r_n$

따라서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{2}\pi r_n}{2\pi r_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$

$\therefore q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore pq^2=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$ 답 ④

16 $\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n-1=\log_2 a_n-\log_2 2=\log_2\frac{a_n}{2}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{a_n}{2}=\frac{1}{2}a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4^{12}, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=4^{12}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{24}\times 2^{1-n}=2^{25-n}$

$a_k=\frac{1}{8^4}$에서 $2^{25-k}=\frac{1}{8^4}$, $2^{25-k}=2^{-12}$

$25-k=-12$ $\therefore k=37$ 답 ①

참고 $\frac{1}{8^4}=\left(\frac{1}{8}\right)^4=\left(\frac{1}{2^3}\right)^4=(2^{-3})^4=2^{-12}$

17 $a_1=1$이고

$a_2=2a_1=2\times 1=2$

$a_3=2a_2=2\times 2=4$

$a_4=2a_3=2\times 4=8$

$a_5=a_4-7=8-7=1$

$a_6=2a_5=2\times 1=2$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 4, 8이 이 순서대로 반복되는 수열이다. …… ❶

이때 $50=4\times 12+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{50} a_k=(1+2+4+8)+(1+2+4+8)+\cdots+(1+2+4+8)+(1+2)$$

$$=(1+2+4+8)\times 12+1+2$$

$$=183$$ …… ❷

답 183

채점기준	배점
❶ 수열 $\{a_n\}$의 규칙 찾기	3
❷ $\sum_{k=1}^{50} a_k$의 값 구하기	3

18 조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. …… ❶

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d $(d>0)$라 하면 조건 (나)에서

$(a+3d)\{(a+9d)-(a+4d)\}$

$=(a+5d)\{(a+11d)-(a+8d)\}+20$

$5d(a+3d)=3d(a+5d)+20$

$5ad+15d^2=3ad+15d^2+20$

$2ad=20$ $\therefore ad=10$ …… ㉠ …… ❷

$a>0$, $d>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S_{21}=\frac{21(2a+20d)}{2}=21(a+10d)$$

$$\ge 21\times 2\sqrt{a\times 10d}$$

$$=42\sqrt{10ad}=42\times\sqrt{10\times 10}$$

$$=420 \text{ (단, 등호는 } a=10d \text{일 때 성립)}$$

따라서 S_{21}의 최솟값은 420이다.

$\therefore m=420$ …… ❸

이때 등호는 $a=10d$일 때 성립하므로 이것을 ㉠에 대입하면

$10d\times d=10$, $d^2=1$ $\therefore d=1$ $(\because d>0)$

$\therefore a=10d=10\times 1=10$ …… ❹

따라서 S_{21}이 최소일 때, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 10, 공차는 1이므로

$a_n=10+(n-1)\times 1=n+9$

$\therefore a_{21}=21+9=30$ $\therefore A=30$

$\therefore m+A=420+30=450$ …… ❺

답 450

채점기준	배점
❶ 수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 알기	1
❷ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 a, d에 대한 관계식 세우기	2
❸ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 m의 값 구하기	2
❹ 산술평균과 기하평균에서 등호의 성립 조건을 만족시키는 a, d의 값 찾기	2
❺ a, d의 값을 이용하여 A의 값과 $m+A$의 값 구하기	1

참고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=d$

수능형 기출문제 & 변형문제 p.140~142

1 조건 (가)에서

$a_3=a_1-3$, $a_5=a_3-3=(a_1-3)-3=a_1-6$

$a_4=a_2+3$, $a_6=a_4+3=(a_2+3)+3=a_2+6$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$=a_1+a_2+(a_1-3)+(a_2+3)+(a_1-6)+(a_2+6)$

$=3a_1+3a_2$

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{32} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}+a_{32}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_6)+(a_7+a_8+\cdots+a_{12})$

$+(a_{13}+a_{14}+\cdots+a_{18})+\cdots+(a_{25}+a_{26}+\cdots+a_{30})$

$+a_{31}+a_{32}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_6)\times 5+a_1+a_2$

$=5(3a_1+3a_2)+a_1+a_2$

$=16(a_1+a_2)=112$

$\therefore a_1+a_2=7$ 답 7

2 조건 (가)에서

$a_1+a_5=a_2+a_6=a_3+a_7=a_4+a_8=15$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$

$=(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)$

$=15+15+15+15=60$

$6+(a_5+a_6+a_7+a_8)=60 \left(\because \sum_{k=1}^{4} a_k=6\right)$

$\therefore a_5+a_6+a_7+a_8=54$ ····· ㉠

이때 조건 (나)에서 $a_{n+1}=a_n+n$ $(n\geq 5)$이므로 이 식의 n에 5, 6, 7을 차례로 대입하면

$a_6=a_5+5$

$a_7=a_6+6=a_5+5+6$

$a_8=a_7+7=a_5+5+6+7$

따라서 ㉠에서

$a_5+(a_5+5)+(a_5+5+6)+(a_5+5+6+7)=54$

$4a_5+34=54$, $4a_5=20$

$\therefore a_5=5$ 답 ⑤

3 수열 $\{a_n\}$은

10, 10, −19, 10, 10, −19, …

와 같이 10, 10, −19가 이 순서대로 반복되는 수열이다.

따라서 자연수 m에 대하여

$\sum_{k=1}^{3m} a_k=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)$

$+\cdots+(a_{3m-2}+a_{3m-1}+a_{3m})$

$=\{10+10+(-19)\}+\{10+10+(-19)\}$

$+\cdots+\{10+10+(-19)\}$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{개}}=1\times m=m$

$\sum_{k=1}^{3m-1} a_k=\sum_{k=1}^{3m} a_k-a_{3m}=m-(-19)=m+19$

$\sum_{k=1}^{3m-2} a_k=\sum_{k=1}^{3m} a_k-a_{3m}-a_{3m-1}=m-(-19)-10=m+9$

자연수 n이

(i) $n=3m$일 때

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{3n} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{3m} a_k=\sum_{k=1}^{3(3m)} a_k$

$m=3m$ $\therefore m=0$

그런데 m은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=3m-1$일 때

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{3n} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{3m-1} a_k=\sum_{k=1}^{3(3m-1)} a_k$

$m+19=3m-1$

$-2m=-20$ $\therefore m=10$

$\therefore n=3\times 10-1=29$

(iii) $n=3m-2$일 때

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{3n} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{3m-2} a_k=\sum_{k=1}^{3(3m-2)} a_k$

$m+9=3m-2$

$-2m=-11$ $\therefore m=\frac{11}{2}$

그런데 m은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $n=29$ 답 ⑤

4 수열 $\{a_n\}$은

5, 5, 5, −13, 5, 5, 5, −13, …,

과 같이 5, 5, 5, −13이 이 순서대로 반복되는 수열이다.

따라서 자연수 m에 대하여

$\sum_{k=1}^{4m} a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)$

$+\cdots+(a_{4m-3}+a_{4m-2}+a_{4m-1}+a_{4m})$

$=\{5+5+5+(-13)\}+\{5+5+5+(-13)\}$

$+\cdots+\{5+5+5+(-13)\}$

$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{m\text{개}}=2\times m=2m$

$\sum_{k=1}^{4m-1} a_k=\sum_{k=1}^{4m} a_k-a_{4m}=2m-(-13)=2m+13$

$\sum_{k=1}^{4m-2} a_k=\sum_{k=1}^{4m} a_k-a_{4m}-a_{4m-1}=2m-(-13)-5=2m+8$

$\sum_{k=1}^{4m-3} a_k=\sum_{k=1}^{4m} a_k-a_{4m}-a_{4m-1}-a_{4m-2}$

$=2m-(-13)-5-5=2m+3$

자연수 n이

(i) $n=4m$일 때

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{4n} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{4m} a_k=\sum_{k=1}^{4(4m)} a_k$

$2m=2\times 4m$ $\therefore m=0$

그런데 m은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=4m-1$일 때

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{4n} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{4m-1} a_k=\sum_{k=1}^{4(4m-1)} a_k$

$2m+13=2(4m-1)$, $2m+13=8m-2$

$-6m=-15$ $\therefore m=\frac{5}{2}$

그런데 m은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n=4m-2$일 때

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{4n} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{4m-2} a_k=\sum_{k=1}^{4(4m-2)} a_k$

$2m+8=2(4m-2)$

$2m+8=8m-4$, $-6m=-12$ $\therefore m=2$

$\therefore n=4\times2-2=6$

(iv) $n=4m-3$일 때

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{4n} a_k$에서 $\sum_{k=1}^{4m-3} a_k=\sum_{k=1}^{4(4m-3)} a_k$

$2m+3=2(4m-3)$

$2m+3=8m-6$, $-6m=-9$ $\therefore m=\frac{3}{2}$

그런데 m은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $n=6$ 답 6

5 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+S_n=k$ …… ㉠

이므로 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1+S_1=k$, $a_1+a_1=k$ ($\because S_1=a_1$)

$2a_1=k$ $\therefore a_1=\frac{k}{2}$

또 ㉠에서 $a_{n+1}+S_{n+1}=k$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$a_{n+1}-a_n+S_{n+1}-S_n=0$

$a_{n+1}-a_n+a_{n+1}=0$ ($\because S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$)

$2a_{n+1}=a_n$ $\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{k}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{\frac{k}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=k\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

이때 $S_6=189$이므로

$k\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}=189$

$\frac{63}{64}k=189$ $\therefore k=192$ 답 ①

6 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+2S_n=k$ …… ㉠

이므로 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1+2S_1=k$, $a_1+2a_1=k$ ($\because S_1=a_1$)

$3a_1=k$ $\therefore a_1=\frac{k}{3}$

또 ㉠에서 $a_{n+1}+2S_{n+1}=k$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$a_{n+1}-a_n+2S_{n+1}-2S_n=0$

$a_{n+1}-a_n+2(S_{n+1}-S_n)=0$

$a_{n+1}-a_n+2a_{n+1}=0$ ($\because S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$)

$3a_{n+1}=a_n$ $\therefore a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{k}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{\frac{k}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{k}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

이때 $S_5=121$이므로

$\frac{k}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}=121$

$\frac{242}{243}\times\frac{k}{2}=121$ $\therefore k=243$ 답 ②

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.144~147

01 함수 $y=-2\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)-3$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

함수 $y=3\cos 6x$의 주기는 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

따라서 $a=4\pi$, $b=\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{a}{b}=\frac{4\pi}{\frac{\pi}{3}}=12$ 답 ⑤

02 $\sum_{k=1}^{20}(a_k-3b_k+1)=\sum_{k=1}^{20}a_k-3\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}1$

$=100-3\times(-12)+1\times 20$

$=156$ 답 ⑤

03 $\angle ABC=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(7\sqrt{2})^2+8^2-(5\sqrt{2})^2}{2\times 7\sqrt{2}\times 8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0<\theta<\pi$) 답 ②

04 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=-4$에서 $a+2d=-4$ …… ㉠

$a_2+a_7=-17$에서 $(a+d)+(a+6d)=-17$

$2a+7d=-17$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=-3$

따라서 $a_n=2+(n-1)\times(-3)=-3n+5$이므로

$a_{10}=-3\times 10+5=-25$ 답 ③

05 6, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=6+b$ $\therefore a=\frac{6+b}{2}$ …… ㉠

a, b, 6이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=6a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2=6\times\frac{6+b}{2}$, $b^2=3(6+b)$, $b^2-3b-18=0$

$(b+3)(b-6)=0$ $\therefore b=-3$ ($\because b\neq 6$)

이를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=\frac{3}{2}+(-3)=-\frac{3}{2}$ 답 ①

06 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{\frac{1}{4}(2^n-1)}{2-1}=\frac{1}{4}(2^n-1)$

$S_n>1000$에서 $\frac{1}{4}(2^n-1)>1000$, $2^n-1>4000$

$\therefore 2^n>4001$

이때 $2^{11}=2048<4001$, $2^{12}=4096>4001$이므로

$n=12$ 답 ④

07 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하고, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

코사인법칙에 의하여 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin(\pi-A)=\cos B\sin C$에서

$\sin A=\cos B\sin C$

$\frac{a}{2R}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R}$, $a=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

$2a^2=c^2+a^2-b^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다. 답 ③

08 ① $f\left(-\frac{5}{36}\pi\right)=-2\tan\left(-\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{6}\right)-1$

$=-2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1$

$=2\tan\frac{\pi}{4}-1=1$

② 최댓값도 최솟값도 존재하지 않는다.

③ 함수 $y=-2\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-1$의 그래프의 점근선의 방정식은 $3x+\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$3x=n\pi+\frac{\pi}{3}$ $\therefore x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{9}$ (단, n은 정수)

④ 함수 $f(x)=-2\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-1$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

⑤ $y=-2\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-1=-2\tan\left\{3\left(x+\frac{\pi}{18}\right)\right\}-1$이므로 함수 $y=-2\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-1$의 그래프는 함수 $y=-2\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{18}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=-2\tan 3x$의 그래프가 원점 $(0, 0)$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=-2\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-1$의 그래프는 점 $\left(-\frac{\pi}{18}, -1\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

09 $a_na_{n+1}=3n$ …… ㉠

㉠에 $n=4$를 대입하면

$a_4a_5=12$, $3a_5=12$ ($\because a_4=3$) $\therefore a_5=4$

㉠에 $n=3$을 대입하면

$a_3a_4=9,\ 3a_3=9\ (\because a_4=3)\qquad \therefore a_3=3$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_2a_3=6,\ 3a_2=6\ (\because a_3=3)\qquad \therefore a_2=2$

$\therefore a_2+a_3+a_5=2+3+4=9$ 답 ①

10 구하는 적립금의 원리합계는

$$50(1+0.006)+50(1+0.006)^2+50(1+0.006)^3+\cdots+50(1+0.006)^{36}$$

$$=\frac{50\times1.006\times(1.006^{36}-1)}{1.006-1}$$

$$=\frac{50\times1.006\times(1.24-1)}{0.006}$$

$=2012$(만 원) 답 ②

11 ㄱ. 함수 $f(x)=x^2-6x$와 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 정수이므로 $f(n)<m<f(n)+4n$을 만족시키는 정수 m은

$f(n)+1,\ f(n)+2,\ f(n)+3,\ \cdots,\ f(n)+4n-1$

이고, 그 개수는 $4n-1$이다.

$\therefore a_n=4n-1$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열이다. (참)

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times4\}}{2}=\frac{n(6+4n-4)}{2}$$

$$=\frac{n(4n+2)}{2}=n(2n+1)$$

$=2n^2+n$ (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}$

$$=\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{6}\frac{\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1}}{(\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1})(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1})}$$

$$=\sum_{n=1}^{6}\frac{\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1}}{(4n+3)-(4n-1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{6}\frac{\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{6}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1})$$

$$=\frac{1}{4}\{(\sqrt{7}-\sqrt{3})+(\sqrt{11}-\sqrt{7})+(\sqrt{15}-\sqrt{11})+\cdots+(\sqrt{27}-\sqrt{23})\}$$

$$=\frac{1}{4}\times(\sqrt{27}-\sqrt{3})=\frac{1}{4}\times(3\sqrt{3}-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

다른풀이 ㄴ. $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=4\times\frac{n(n+1)}{2}-n=2n^2+n$$ (거짓)

12 $a_1=2$

$a_2=2+4$

$a_3=2+4+6$

$a_4=2+4+6+8$

$\vdots$

$a_n=2+4+6+8+\cdots+2n$

$$=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{9}\log\frac{k^2}{a_k}=\sum_{k=1}^{9}\log\frac{k^2}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{9}\log\frac{k}{k+1}$$

$$=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\cdots+\log\frac{9}{10}$$

$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{9}{10}\right)$$

$$=\log\frac{1}{10}=\log10^{-1}=-1$$ 답 ②

13 (i) $n=2$일 때

(좌변) $=1\times2=2$, (우변) $=\dfrac{2\times1\times3\times8}{24}=2$

즉 (좌변) $=$ (우변) $=\boxed{2}$이므로 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m-1}k\{(k+1)+(k+2)+\cdots+m\}$$

$$=\frac{m(m-1)(m+1)(3m+2)}{24}$$

이다. $n=m+1$일 때

$$\sum_{k=1}^{m}k\{(k+1)+(k+2)+\cdots+m+(m+1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}k\{(k+1)+(k+2)+\cdots+m+(m+1)\}+\boxed{m(m+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}k\{(k+1)+(k+2)+\cdots+m\}+\sum_{k=1}^{m-1}k(m+1)+m(m+1)$$

$$=\frac{m(m-1)(m+1)(3m+2)}{24}+(m+1)\sum_{k=1}^{m-1}k+m(m+1)$$

$$=\frac{m(m-1)(m+1)(3m+2)}{24}+\boxed{\frac{m(m-1)(m+1)}{2}}+\boxed{m(m+1)}$$

$$=\frac{m(m+1)}{24}\{(m-1)(3m+2)+12(m-1)+24\}$$

$$=\frac{m(m+1)(3m^2+11m+10)}{24}$$

$$=\frac{m(m+1)(m+2)(3m+5)}{24}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 2 이상의 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $a=2$이고, $f(m)=m(m+1)$,

$g(m)=\dfrac{m(m-1)(m+1)}{2}$이므로

$f(2)=2\times3=6$, $g(2)=\dfrac{2\times1\times3}{2}=3$

$\therefore a\times f(2)\times g(2)=2\times6\times3=36$ 답 ①

14 등비수열 $\{a_n\}$은 90000, 30000, 10000, $\dfrac{10000}{3}$, …과 같이 모든 항이 양수이면서 점점 작아진다.

이때 $f(n)=a_1a_2a_3\cdots a_n$의 값이 최대가 되려면 1보다 큰 항까지만 곱해야 한다.

$a_n<1$에서 $90000\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}<1$

$90000<3^{n-1}$, $\log90000<(n-1)\log3$

$n-1>\dfrac{\log90000}{\log3}$

$\therefore n>\dfrac{2\log3+4}{\log3}+1$

$=\dfrac{2\times0.48+4}{0.48}+1=\dfrac{34}{3}=11.333\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제12항부터 1보다 작아진다.

따라서 첫째항부터 제11항까지의 곱이 최대이므로 $f(n)$의 값이 최대가 되는 자연수 n의 값은 11이다. 답 ②

15 수열 $\{a_n\}$을 순서대로 나열하면

15, 10, 5, 5, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 0, …

과 같이 세 번째 항부터 5, 5, 0이 반복되므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_2=15+10$

$S_5=15+10+(5+5+0)$

$S_8=15+10+2\times(5+5+0)$

$S_{11}=15+10+3\times(5+5+0)$

⋮

$\therefore S_{3n-1}=15+10+(n-1)\times(5+5+0)$

$=10n+15\ (n\geq1)$

따라서

$S_{3n}=S_{3n-1}+5=10n+20$

$S_{3n+1}=S_{3n}+5=10n+25$

이므로

(i) $S_{3n-1}=10n+15=185$에서

$10n=170$ $\therefore n=17$

즉 $S_{50}=185$이므로 $\sum_{k=1}^{50}a_k=185$ $\therefore m=50$

(ii) $S_{3n}=10n+20=185$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iii) $S_{3n+1}=10n+25=185$에서

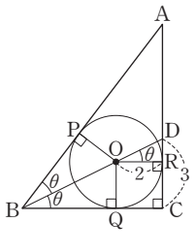
$10n=160$ $\therefore n=16$

즉 $S_{49}=185$이므로 $\sum_{k=1}^{49}a_k=185$ $\therefore m=49$

(i), (ii), (iii)에서 $m=50$ 또는 $m=49$이므로 모든 자연수 m의 값의 합은

$50+49=99$ 답 ⑤

16 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC와 내접원의 접점을 각각 P, Q, R라 하면



$\overline{OR}=\overline{OQ}=\overline{QC}=\overline{RC}=2$

$\overline{DC}=3$이므로

$\overline{DR}=\overline{DC}-\overline{RC}=3-2=1$

또 점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$\angle ABD=\angle DBC$

이때 $\angle ABD=\angle DBC=\theta$라 하면

$\overline{OR}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle DOR=\theta$

따라서 직각삼각형 DOR에서

$\overline{OD}=\sqrt{\overline{OR}^2+\overline{DR}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\overline{DR}}{\overline{OD}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

두 직각삼각형 DOR, DBC에서

$\angle DOR=\angle DBC=\theta$, $\angle ORD=\angle BCD=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\triangle DOR\backsim\triangle DBC$ (AA 닮음)

즉 $\overline{DR}:\overline{DC}=\overline{OR}:\overline{BC}$이므로

$1:3=2:\overline{BC}$ $\therefore \overline{BC}=6$

$\therefore \overline{BQ}=\overline{BC}-\overline{QC}=6-2=4$

또 원의 접선의 성질에 의하여

$\overline{BP}=\overline{BQ}=4$, $\overline{AP}=\overline{AR}$

이때 $\overline{AP}=\overline{AR}=x$라 하면 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

$(\overline{AP}+\overline{PB})^2=\overline{BC}^2+(\overline{AR}+\overline{RC})^2$

$(x+4)^2=6^2+(x+2)^2$

$x^2+8x+16=36+x^2+4x+4$

$4x=24$ $\therefore x=6$

즉 $\overline{AR}=6$이므로

$\overline{AD}=\overline{AR}-\overline{DR}=6-1=5$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R$, $\dfrac{5}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$ $\therefore R=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{125}{4}\pi$ 답 ②

17 첫째항이 3, 제$(n+2)$항이 33인 등차수열의 합이 450이므로

$\dfrac{(n+2)(3+33)}{2}=450$, $n+2=25$

$\therefore n=23$ …… ❶

따라서 33은 등차수열 3, a_1, a_2, a_3, …, a_{23}, 33의 제25항이므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$3+24d=33$, $24d=30$ $\therefore d=\dfrac{5}{4}$ …… ❷

$\therefore a_5-a_1=4d=4\times\dfrac{5}{4}=5$ …… ❸

답 5

채점기준	배점
❶ 자연수 n의 값 구하기	2
❷ 주어진 등차수열의 공차 구하기	2
❸ a_5-a_1의 값 구하기	1

18 $a_{n+1}=S_n+2$ ····· ㉠

$a_n=S_{n-1}+2\ (n\geq 2)$ ····· ㉡

이므로 ㉠−㉡을 하면

$a_{n+1}-a_n=(S_n+2)-(S_{n-1}+2)$

$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}$, $a_{n+1}-a_n=a_n$

$\therefore a_{n+1}=2a_n\ (n\geq 2)$ ····· ❶

즉 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공비가 2인 등비수열이다.

이때 ㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_2=S_1+2=a_1+2=2+2=4$ ····· ❷

즉 $a_1=2$, $a_2=4$에서 $\frac{a_2}{a_1}=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 공비가 2인 등비수열이다. ····· ❸

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공비는 2이므로

$S_9=\frac{2\times(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2=1022$ ····· ❹

답 1022

채점기준	배점
❶ $n\geq 2$일 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기	2
❷ a_2의 값 구하기	1
❸ 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 공비가 2인 등비수열임을 설명하기	2
❹ S_9의 값 구하기	1

19 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{21}$

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{21}\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{21}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{7}$ ····· ❶

또 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $\sqrt{21}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}=2\sqrt{21}$

$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{21}\times\sin(\angle BDC)=2\sqrt{21}\times\frac{\sqrt{21}}{14}=3$ ····· ❷

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BCD=\pi-\angle BAD=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 삼각형 BCD에서 $\overline{CD}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{7})^2=3^2+x^2-2\times 3\times x\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$63=9+x^2-6x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$, $x^2+3x-54=0$

$(x+9)(x-6)=0$ $\therefore x=6\ (\because x>0)$

즉 $\overline{CD}=6$이므로 ····· ❸

$\overline{BC}+\overline{CD}=3+6=9$ ····· ❹

답 9

채점기준	배점
❶ $\overline{BD}$의 길이 구하기	1
❷ $\overline{BC}$의 길이 구하기	1
❸ $\overline{CD}$의 길이 구하기	3
❹ $\overline{BC}+\overline{CD}$의 값 구하기	1

20 $\cos A=\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$이므로

$2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$에서

$2\sin^2\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\leq 1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ ····· ❶

$2\left\{1-\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}\leq 1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$2-2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-1\geq 0$

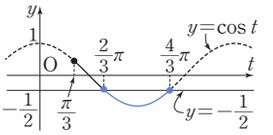
$\left\{2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+1\right\}\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-1\right\}\geq 0$

$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\geq 1$ ····· ❷

이때 $\theta+\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $0\leq\theta\leq\pi$에서

$\frac{\pi}{3}\leq\theta+\frac{\pi}{3}\leq\frac{4}{3}\pi$, 즉 $\frac{\pi}{3}\leq t\leq\frac{4}{3}\pi$이므로

(i)

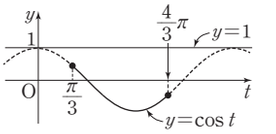


$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{1}{2}$, 즉 $\cos t\leq-\frac{1}{2}$에서

$\frac{2}{3}\pi\leq t\leq\frac{4}{3}\pi$

즉 $\frac{2}{3}\pi\leq\theta+\frac{\pi}{3}\leq\frac{4}{3}\pi$이므로 $\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\pi$ ····· ❸

(ii)



$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\geq 1$, 즉 $\cos t\geq 1$을 만족시키는 t는 $\frac{\pi}{3}\leq t\leq\frac{4}{3}\pi$에서 존재하지 않는다. ····· ❹

(i), (ii)에서 부등식 $2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$의 해는

$\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\pi$

$\therefore 100\sin^2(\beta-\alpha)=100\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=100\sin^2\frac{\pi}{3}$

$=100\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=75$ ····· ❺

답 75

채점기준	배점
❶ 주어진 부등식을 $\theta+\frac{\pi}{3}$에 대한 함수로 나타내기	2
❷ 부등식을 풀어 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$의 값의 범위 구하기	1
❸ $0\le\theta\le\pi$에서 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\le-\frac{1}{2}$의 해 구하기	2
❹ $0\le\theta\le\pi$에서 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\ge1$의 해가 존재하지 않음을 설명하기	2
❺ 주어진 부등식의 해를 구하여 $100\sin^2(\beta-\alpha)$의 값 구하기	1

실전 모의고사 2회

p.148~151

01 $\sum_{k=1}^{7}(2k+1)^2-\sum_{i=1}^{7}(3i^2+4i-1)$

$=\sum_{k=1}^{7}(4k^2+4k+1)-\sum_{k=1}^{7}(3k^2+4k-1)$

$=\sum_{k=1}^{7}\{(4k^2+4k+1)-(3k^2+4k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{7}(k^2+2)=\frac{7\times8\times15}{6}+2\times7=154$ 답 ④

02 $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-\tan\frac{5}{4}\pi=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore 2\sin\frac{7}{6}\pi+3\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)-4\cos\frac{13}{3}\pi$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times(-1)-4\times\frac{1}{2}=-6$ 답 ①

03 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3n^2+n-4$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=3+1-4=0$

$n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2+n-4)-\{3(n-1)^2+(n-1)-4\}$

$=6n-2$

$\therefore a_n=\begin{cases}0 & (n=1)\\ 6n-2 & (n\ge2)\end{cases}$

따라서 $a_3=6\times3-2=16$, $a_5=6\times5-2=28$이므로

$a_1+a_3+a_5=0+16+28=44$ 답 ①

04 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2=ar=3$ …… ㉠

$a_6=ar^5=108$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4=36$, $r^2=6$ $\therefore r=\sqrt{6}$ $(\because r>0)$

이를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{6}a=3$ $\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 $a_n=\frac{\sqrt{6}}{2}\times(\sqrt{6})^{n-1}=\frac{(\sqrt{6})^n}{2}$이므로

$a_5=\frac{(\sqrt{6})^5}{2}=\frac{36\sqrt{6}}{2}=18\sqrt{6}$

$\therefore a_1a_5=\frac{\sqrt{6}}{2}\times18\sqrt{6}=54$ 답 ④

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=40$ …… ㉠

$a_8=a+7d=28$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=49$, $d=-3$

$\therefore a_n=49+(n-1)\times(-3)=-3n+52$

$a_n<0$에서 $-3n+52<0$, $-3n<-52$

$\therefore n>\frac{52}{3}=17.3333\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제18항부터 음수이므로 첫째항부터 제17항까지의 합이 최대이다.

따라서 S_n의 최댓값은 S_{17}이므로

$S_{17}=\frac{17\times\{2\times49+16\times(-3)\}}{2}=425$ 답 ①

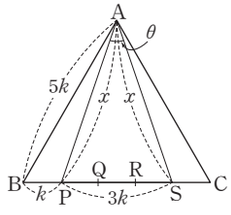
다른풀이 $S_{17}=\sum_{k=1}^{17}a_k=\sum_{k=1}^{17}(-3k+52)$

$=-3\sum_{k=1}^{17}k+\sum_{k=1}^{17}52$

$=-3\times\frac{17\times18}{2}+17\times52$

$=425$

06 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $5k$ $(k>0)$라 하고, $\overline{AP}=x$ $(x>0)$라 하면 삼각형 ABP에서 $\overline{BP}=k$이므로 코사인법칙에 의하여



$x^2=(5k)^2+k^2-2\times5k\times k\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=26k^2-10k^2\times\frac{1}{2}=21k^2$

$\therefore x=\sqrt{21}k$

즉 $\overline{AP}=\overline{AS}=\sqrt{21}k$이고, $\overline{PS}=3k$이므로 삼각형 APS에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{21}k)^2+(\sqrt{21}k)^2-(3k)^2}{2\times\sqrt{21}k\times\sqrt{21}k}$

$=\frac{33k^2}{42k^2}=\frac{11}{14}$ 답 ④

07 $2\sin^2x+\cos x-k+2=0$에서

$2(1-\cos^2x)+\cos x-k+2=0$

$2-2\cos^2x+\cos x-k+2=0$

$\therefore -2\cos^2x+\cos x+4=k$ ····· ㉠

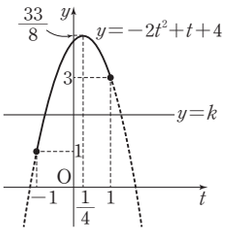
방정식 ㉠이 실근을 가지려면 함수 $y=-2\cos^2x+\cos x+4$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-2\cos^2x+\cos x+4$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$y=-2t^2+t+4=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$

따라서 방정식 ㉠이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서

$1\le k\le\frac{33}{8}$ 답 ③



08 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

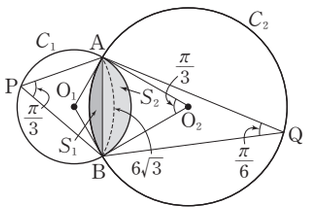
$\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_1$ $\therefore R_1=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=6$

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R_2$ $\therefore R_2=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하면

$\angle AO_1B=\frac{2}{3}\pi$, $\angle AO_2B=\frac{\pi}{3}$



위의 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1=$(부채꼴 ABO_2의 넓이)$-$(삼각형 ABO_2의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times6\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=18\pi-27\sqrt{3}$

$S_2=$(부채꼴 AO_1B의 넓이)$-$(삼각형 AO_1B의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times6\times6\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=12\pi-9\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는

$S_1+S_2=(18\pi-27\sqrt{3})+(12\pi-9\sqrt{3})$

$=30\pi-36\sqrt{3}$ 답 ②

09 ㄱ. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_2a_3>0$에서 $a\times ar\times ar^2>0$, $a^3r^3>0$이므로

$r^3<0$ ($\because a=a_1<0$에서 $a^3<0$)

$\therefore r<0$

즉 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 0보다 작다. (거짓)

ㄴ. $a_2a_{10}-a_3a_8=ar\times ar^9-ar^2\times ar^7$

$=a^2r^9(r-1)>0$ ($\because a^2>0$, $r^9<0$, $r-1<0$)

$\therefore a_2a_{10}>a_3a_8$ (참)

ㄷ. [반례] $a_1<0$, $r<0$이므로 $a_2>0$, $a_3<0$

$\therefore a_3<a_2$

즉 $n=2$일 때 $a_{n+1}<a_n$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ①

10 (i) $n=1$일 때, $5^2-1=\boxed{24}$는 8의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $5^{2n}-1$이 8의 배수라 가정하면

$5^{2k}-1=8M$ (M은 자연수)이므로

$5^{2k}=8M+1$

$n=k+1$일 때

$5^{2(k+1)}-1=5^{2k+2}-1$

$=\boxed{25}\times5^{2k}-1$

$=25\times(8M+1)-1$

$=200M+24$

$=8\times(25M+\boxed{3})$

이므로 $n=k+1$일 때도 $5^{2n}-1$이 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $5^{2n}-1$은 8의 배수이다.

따라서 $a=24$, $b=25$, $c=3$이므로

$a+b+c=24+25+3=52$ 답 ②

11 $\sum_{k=1}^{39}\log_2\{\log_{2k+1}(2k+3)\}$

$=\log_2(\log_35)+\log_2(\log_57)+\log_2(\log_79)$

$+\cdots+\log_2(\log_{79}81)$

$=\log_2(\log_35\times\log_57\times\log_79\times\cdots\times\log_{79}81)$

$=\log_2\left(\frac{\log5}{\log3}\times\frac{\log7}{\log5}\times\frac{\log9}{\log7}\times\cdots\times\frac{\log81}{\log79}\right)$

$=\log_2\frac{\log81}{\log3}=\log_2(\log_381)$

$=\log_24=2$ 답 ②

12 함수 $y=6a\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-a^2+16$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 이 함수의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

최솟값이 $-|6a|-a^2+16$이므로

$-|6a|-a^2+16\ge0$ ····· ㉠

(i) $a>0$일 때

㉠에서 $-6a-a^2+16\ge0$, $a^2+6a-16\le0$

$(a+8)(a-2)\le0$ $\therefore -8\le a\le2$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\le2$

(ii) $a=0$일 때

함수 $y=6a\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-a^2+16$, 즉 $y=16$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $a<0$일 때

㉠에서 $-(-6a)-a^2+16\ge0$, $a^2-6a-16\le0$

$(a+2)(a-8)\le0$ $\therefore -2\le a\le8$

그런데 $a<0$이므로 $-2\le a<0$

(i), (ii), (iii)에서 $-2\le a\le 2$이므로 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. 답 ①

다른풀이 $-|6a|-a^2+16\ge 0$에서

$a^2+6|a|-16\le 0$, $|a|^2+6|a|-16\le 0$이므로

$(|a|+8)(|a|-2)\le 0$

$\therefore |a|\le 2$ ($\because |a|+8>0$)

따라서 $-2\le a\le 2$이므로 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

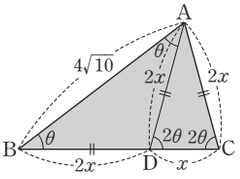
13 $\triangle ABD:\triangle ADC=2:1$에서

$\overline{BD}:\overline{DC}=2:1$이므로

$\overline{DC}=x$라 하면

$\overline{BD}=\overline{AD}=\overline{AC}=2x$,

$\overline{BC}=3x$



이등변삼각형 ABD에서 $\angle ABD=\angle BAD=\theta$라 하면

$\angle ADC=\angle ACD=2\theta$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 2\theta=\frac{(2x)^2+x^2-(2x)^2}{2\times 2x\times x}=\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$$

또 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 2\theta=\frac{(3x)^2+(2x)^2-(4\sqrt{10})^2}{2\times 3x\times 2x}$$

$\frac{1}{4}=\frac{13x^2-160}{12x^2}$, $12x^2=4(13x^2-160)$

$3x^2=13x^2-160$, $10x^2=160$, $x^2=16$

$\therefore x=4$ ($\because x>0$)

한편 2θ는 예각이므로 $\sin 2\theta>0$이고

$$\sin 2\theta=\sqrt{1-\cos^2 2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 $\overline{AC}=2x=8$, $\overline{BC}=3x=12$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$=12\sqrt{15}$$ 답 ④

14 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 조건 (가)에서

$a_4=a+3d=-9$ ····· ㉠

조건 (나)에서 $|a_9|=|a_2|$이므로

$a_9=a_2$ 또는 $a_9=-a_2$

이때 $a_9=a_2$이면 $a+8d=a+d$, $7d=0$ $\therefore d=0$

이는 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니라는 조건을 만족시키지 않는다. 즉 $a_9=-a_2$이므로

$a+8d=-(a+d)$, $a+8d=-a-d$

$\therefore 2a+9d=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

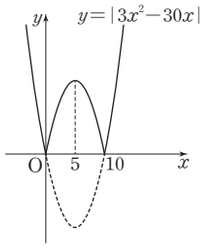
$a=-27$, $d=6$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2\times(-27)+(n-1)\times 6\}}{2}=3n^2-30n$$

이므로 $T_n=|S_n|=|3n^2-30n|$

함수 $y=|3x^2-30x|$, 즉 $y=3|(x-5)^2-25|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$T_1<T_2<T_3<T_4<T_5$,

$T_5>T_6>T_7>T_8>T_9>T_{10}$,

$T_{10}<T_{11}<T_{12}<\cdots$

따라서 $T_n>T_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로

$M=9$, $m=5$

$\therefore Mm=9\times 5=45$ 답 ③

15 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 서로 다른 양수이므로 첫째항을 a ($a>0$), 공비를 r ($r>0$, $r\ne 1$)라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로 $a_{2n}=ar^{2n-1}$

$$\therefore \frac{1}{a_{2n}}=\frac{1}{ar^{2n-1}}$$

즉 수열 $\left\{\frac{1}{a_{2n}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar}$이고 공비가 $\frac{1}{r^2}$인 등비수열이다.

이때 $T_n=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}}$은 수열 $\left\{\frac{1}{a_{2n}}\right\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$T_n=\frac{\frac{1}{ar}\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{r^2}}=\frac{r\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^n\right\}}{a(r^2-1)}$$ ····· ㉢

$T_2=\frac{5}{8}$, $T_4=\frac{85}{8}$이므로

$$\frac{r\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^2\right\}}{a(r^2-1)}=\frac{5}{8}$$ ····· ㉣

$$\frac{r\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^4\right\}}{a(r^2-1)}=\frac{85}{8}$$ ····· ㉤

㉣÷㉤을 하면

$$\frac{r\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^2\right\}}{r\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^4\right\}}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{85}{8}},\ \frac{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^4}=\frac{1}{17}$$

$$\frac{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{1}{r^2}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^2\right\}}=\frac{1}{17},\ \frac{1}{1+\left(\frac{1}{r^2}\right)^2}=\frac{1}{17}$$

$1+\left(\frac{1}{r^2}\right)^2=17$, $\left(\frac{1}{r^2}\right)^2=16$

$\frac{1}{r^2}=4$, $r^2=\frac{1}{4}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

이를 ㉣에 대입하면

$$\frac{\frac{1}{2}\times(1-4^2)}{a\times\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\frac{5}{8},\ \frac{10}{a}=\frac{5}{8}$$ $\therefore a=16$

$$\therefore T_5=\frac{\frac{1}{2}\times(1-4^5)}{16\times\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\frac{341}{8}\ (\because \text{㉢})$$ 답 ①

16 [n단계]에서 새로 색칠하는 정사각형의 넓이를 a_n이라 하면

$a_1=8^2\times\frac{1}{4}\times 1$

$a_2=8^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 3$

$a_3=8^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times 9=8^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times 3^2$

$a_4=8^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times 27=8^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times 3^3$

$\vdots$

$a_n=8^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\times 3^{n-1}=16\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

[10단계]를 마친 후 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합은

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{16\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=64\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$$

답 ④

17 함수 $y=a\sin(bx-c)+d$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$|a|+d=3,\ -|a|+d=-1$

두 식의 양변을 더하면

$2d=2 \quad \therefore d=1$

즉 $|a|=2$이므로 $a=2\ (\because a>0)$ …… ❶

함수 $y=2\sin(bx-c)+1$의 주기가 $\frac{17}{24}\pi-\frac{5}{24}\pi=\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2},\ |b|=4$

$\therefore b=4\ (\because b>0)$ …… ❷

함수 $y=2\sin(4x-c)+1$의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{24}\pi,\ 2\right)$를 지나므로

$2=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-c\right)+1,\ 2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-c\right)=1$

$\therefore \sin\left(\frac{5}{6}\pi-c\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}<c<\pi$에서 $-\pi<-c<-\frac{\pi}{2}$

즉 $-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi-c<\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{5}{6}\pi-c=\frac{\pi}{6} \quad \therefore c=\frac{2}{3}\pi$ …… ❸

$\therefore \frac{ab\pi}{cd}=\frac{2\times 4\times\pi}{\frac{2}{3}\pi\times 1}=12$ …… ❹

답 12

채점기준	배점
❶ a, d의 값 각각 구하기	1
❷ b의 값 구하기	1
❸ c의 값 구하기	2
❹ $\frac{ab\pi}{cd}$의 값 구하기	1

18 삼각형 BCD의 넓이가 $2\sqrt{2}$이므로 $\angle BCD=\theta\ \left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin\theta=2\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\sin\theta=2\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ …… ❶

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta<0$이고

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{1}{3}$ …… ❷

따라서 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\cos\theta$

$=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{17}$ …… ❸

한편 삼각형 ABD에서 $\angle BAD=\pi-\theta$이므로 $\overline{AB}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+3^2-2\times x\times 3\times\cos(\pi-\theta)$

$17=x^2+9-6x\times(-\cos\theta),\ 17=x^2+9-6x\times\frac{1}{3}$

$x^2-2x-8=0,\ (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{AB}=4$ …… ❹

답 4

채점기준	배점
❶ $\angle BCD=\theta$로 놓고 $\sin\theta$의 값 구하기	1
❷ $\cos\theta$의 값 구하기	2
❸ $\overline{BD}$의 길이 구하기	1
❹ $\overline{AB}$의 길이 구하기	2

19 $a_1=a$라 하면

$a_2=a_1-1=a-1$

$a_3=a_2+1=(a-1)+1=a$

$a_4=a_3^2=a^2$

$a_5=a_4-1=a^2-1$

$a_6=a_5+1=(a^2-1)+1=a^2$

$a_7=a_6^2=(a^2)^2=a^4$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은

$a,\ a-1,\ a,\ a^2,\ a^2-1,\ a^2,\ a^4,\ \ldots$ …… ❶

이때 $a_1=a,\ a_4=a^2,\ a_7=a^4,\ \ldots$에서 $a_{3k-2}=a^{2^{k-1}}$이므로

$a_{10}=256$에서 $a^8=256$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ …… ❷

따라서 수열 $\{a_n\}$은

$2,\ 1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 4,\ 16,\ \ldots$

이므로 $a_2=1,\ a_4=4,\ a_6=4$ …… ❸

$\therefore a_2+a_4+a_6=1+4+4=9$ …… ❹

답 9

채점기준	배점
❶ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 할 때, 각 항을 차례대로 a에 대한 식으로 나타내기	2
❷ a의 값 구하기	2
❸ a_2, a_4, a_6의 값 각각 구하기	1
❹ $a_2+a_4+a_6$의 값 구하기	1

20 조건 (다)의 $2\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}+a_{n+2}=2\sqrt{S_nS_{n+2}}$에서

$\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}+a_{n+2}=2\sqrt{S_nS_{n+2}}$

$\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n+2}a_k=2\sqrt{S_nS_{n+2}}$, $S_n+S_{n+2}=2\sqrt{S_nS_{n+2}}$

$(S_n+S_{n+2})^2=(2\sqrt{S_nS_{n+2}})^2$

$S_n{}^2+2S_nS_{n+2}+S_{n+2}{}^2=4S_nS_{n+2}$

$S_n{}^2-2S_nS_{n+2}+S_{n+2}{}^2=0$, $(S_n-S_{n+2})^2=0$

$\therefore S_n=S_{n+2}$ …… ㉠ …… ❶

이때 조건 (나)에서 $S_{12}=14$이므로

$S_2=S_4=S_6=\cdots=S_{12}=S_{14}=\cdots=S_{2n}=\cdots=14$ …… ❷

따라서 $a_1+a_2=S_2=14$, 즉 $a_2=14-a_1$이므로 조건 (가)의

$a_1a_2=48$에서 $a_1(14-a_1)=48$

$14a_1-a_1{}^2=48$, $a_1{}^2-14a_1+48=0$

$(a_1-6)(a_1-8)=0$

$\therefore a_1=6$ 또는 $a_1=8$

$a_1=6$일 때, $a_2=14-a_1=14-6=8$

$a_1=8$일 때, $a_2=14-a_1=14-8=6$

그런데 조건 (가)에서 $a_1<a_2$이므로

$a_1=6$, $a_2=8$

이때 $a_1=S_1$이므로 ㉠에서

$a_1=S_1=S_3=S_5=\cdots=S_{2n-1}=\cdots=6$ …… ❸

따라서

$a_3=S_3-S_2=6-14=-8$

$a_4=S_4-S_3=14-6=8$

$a_5=S_5-S_4=6-14=-8$

$a_6=S_6-S_5=14-6=8$

⋮

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6이고 둘째항부터 8, -8이 이 순서대로 반복되는 수열이다. …… ❹

$\therefore \sum_{k=1}^{20}|a_k|=|a_1|+\sum_{k=2}^{20}|a_k|$

$=|6|+\sum_{k=2}^{20}8$

$=|6|+\sum_{k=1}^{19}8=6+8\times19$

$=158$ …… ❺

답 158

채점기준	배점
❶ 조건 (다)에서 $S_n=S_{n+2}$임을 알아내기	2
❷ $S_2=S_4=S_6=\cdots=S_{12}=\cdots=S_{2n}=\cdots=14$임을 알아내기	1
❸ $a_1=S_1=S_3=S_5=\cdots=S_{2n-1}=\cdots=6$임을 알아내기	2
❹ 수열 $\{a_n\}$의 규칙성 찾기	2
❺ $\sum_{k=1}^{20}\lvert a_k\rvert$의 값 구하기	1

실전 모의고사 3회

p.152~155

01 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_n=-3+(n-1)d$이므로

$a_{12}-a_8=-16$에서

$(-3+11d)-(-3+7d)=-16$, $4d=-16$

$\therefore d=-4$

$\therefore a_8=-3+7\times(-4)=-31$ 답 ①

02 $\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=6\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

즉 $6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{40}{7}$이므로

$1-\frac{1}{n+1}=\frac{20}{21}$, $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{21}$

$\therefore n=20$ 답 ③

03 $2\sin2x+\sqrt{3}=0$에서 $2\sin2x=-\sqrt{3}$

$\therefore \sin2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le x\le\pi$에서 $0\le2x\le2\pi$이므로

$2x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{6}$ 답 ③

04 5로 나누었을 때 나머지가 3인 자연수는

3, 8, 13, 18, 23, …

이 수열의 일반항을 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 5인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times5=5n-2$

$a_n\le200$에서 $5n-2\le200$, $5n\le202$

$\therefore n\le\frac{202}{5}=40.4$

따라서 200 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때 나머지가 3인 수의 합은

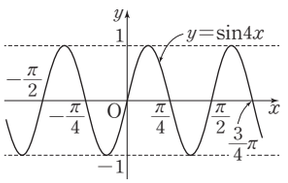
$\sum_{k=1}^{40}a_k=\sum_{k=1}^{40}(5k-2)$

$=5\sum_{k=1}^{40}k-\sum_{k=1}^{40}2$

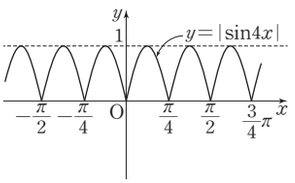
$=5\times\frac{40\times41}{2}-2\times40$

$=4020$ 답 ①

05



[그림 1]



[그림 2]

함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$이므로 함수 $y=|\sin 4x|$의 주기는 [그림 2]와 같이 $\frac{\pi}{4}$이다.

함수 $y=\cos ax-1$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$이고 두 함수 $y=\cos ax-1$, $y=|\sin 4x|$의 주기가 서로 같으므로

$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{4}$, $|a|=8$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$) 답 ④

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

수열 $\{a_n\}$의 제10항이 -46이므로

$a+9d=-46$ ····· ㉠

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제35항까지의 합이 70이므로

$\frac{35(2a+34d)}{2}=70$

$\therefore a+17d=2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-100$, $d=6$

따라서 $a_n=-100+(n-1)\times 6=6n-106$이고

$a_n>0$에서 $6n-106>0$, $6n>106$

$\therefore n>\frac{53}{3}=17.666\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제18항부터 양수이므로 첫째항부터 제17항까지의 합이 최소이다.

$\therefore n=17$ 답 ③

07 ㄱ. $A+B+C=\pi$에서 $B+C=\pi-A$이므로

$\tan A+\tan(B+C)=\tan A+\tan(\pi-A)$

$=\tan A+(-\tan A)=0$ (거짓)

ㄴ. 예각삼각형 ABC에서 $0<A<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos A>0$이다.

$\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$ (참)

ㄷ. $A+B+C=\pi$에서 $A+B=\pi-C$

즉 $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$이므로

$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

08 $S_n=6\times 5^n+a$에서

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=6\times 5+a=30+a$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(6\times 5^n+a)-(6\times 5^{n-1}+a)$

$=6\times 5^n-6\times 5^{n-1}=6\times 5^{n-1}\times(5-1)$

$=24\times 5^{n-1}$ ····· ㉡

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값이 ㉠과 같아야 하므로

$24=30+a$

$\therefore a=-6$ 답 ①

09 $\overline{AD}=x$라 하면

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

$\frac{1}{2}\times 6\times 12\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\times x\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times x\times 12\times\sin 60^\circ$

$\frac{1}{2}\times 6\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\times 6\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times x\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$72=6x+12x$, $18x=72$

$\therefore x=4$ 답 ③

10 $\sum_{k=1}^{8}(2k+1)=3+5+7+9+11+\cdots+17$

$\sum_{k=2}^{8}(2k+1)=5+7+9+11+\cdots+17$

$\sum_{k=3}^{8}(2k+1)=7+9+11+\cdots+17$

$\vdots$

$\sum_{k=8}^{8}(2k+1)=17$

각 변끼리 모두 더하면

$\sum_{k=1}^{8}(2k+1)+\sum_{k=2}^{8}(2k+1)+\sum_{k=3}^{8}(2k+1)+\cdots+\sum_{k=8}^{8}(2k+1)$

$=1\times 3+2\times 5+3\times 7+\cdots+8\times 17$

$=\sum_{k=1}^{8}k(2k+1)=2\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k$

$=2\times\frac{8\times 9\times 17}{6}+\frac{8\times 9}{2}$

$=444$ 답 ①

11 조건 (가), (나)에서 $p(1)$, $p(5)$, $p(9)$, $p(13)$, …이 모두 참이므로 명제 $p(4k-3)$ (k는 자연수)은 모두 참이다.

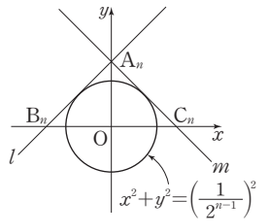
또 $p(2)$, $p(6)$, $p(10)$, $p(14)$, …가 모두 참이므로 명제 $p(4k-2)$ (k는 자연수)는 모두 참이다.

ㄱ. $4k-3=20$ 또는 $4k-2=20$을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않으므로 $p(20)$은 반드시 참이라고 할 수는 없다.

ㄴ. $4k-3=51$ 또는 $4k-2=51$을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않으므로 $p(51)$은 반드시 참이라고 할 수는 없다.

ㄷ. $4k-2=90$에서 $4k=92$ $\therefore k=23$
즉 $p(90)$은 반드시 참이다.
ㄹ. $4k-3=113$에서 $4k=116$ $\therefore k=29$
즉 $p(113)$은 반드시 참이다.
따라서 반드시 참인 명제는 ㄷ, ㄹ의 2개이다. 답 ③

12



직선 l은 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$과 제2사분면에서 접하고 기울기가 1인 직선이므로 직선 l의 방정식은

$y=x+\frac{1}{2^{n-1}}\times\sqrt{1^2+1}$ $\therefore y=x+\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$

직선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$이므로

$B_n\left(-\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}},\ 0\right)$

직선 m은 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$과 제1사분면에서 접하고 기울기가 -1인 직선이므로 직선 m의 방정식은

$y=-x+\frac{1}{2^{n-1}}\times\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$

직선 m이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$이므로

$C_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}},\ 0\right)$

두 직선 l, m은 점 $\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\right)$에서 만나므로

$A_n\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\right)$

따라서 $\overline{B_nC_n}=\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{2^{n-1}}$이므로 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{B_nC_n}\times\overline{OA_n}$ (O는 원점)

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{2^{n-1}}\times\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$

$=\frac{2}{2^{2n-2}}=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{10}S_k=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$ 답 ⑤

참고 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

13 (i) $n=1$일 때
$2\geq\sqrt{4}$이므로 (*)이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2k}{2k-1}\geq\sqrt{3k+1}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $\frac{2k+2}{2k+1}$를 곱하면

$\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2k}{2k-1}\times\frac{2k+2}{2k+1}$

$\geq\sqrt{3k+1}\times\frac{2k+2}{2k+1}$

$=\sqrt{3k+1}\left(1+\frac{1}{\boxed{2k+1}}\right)$

$=\sqrt{3k+1}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\boxed{2k+1}}\right)^2}$

$=\sqrt{3k+1}\sqrt{1+\frac{2}{2k+1}+\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}$

$=\sqrt{(3k+1)\left\{1+\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}}$

$=\sqrt{3k+1+\frac{6k+2}{\boxed{2k+1}}+\frac{3k+1}{(\boxed{2k+1})^2}}$

$=\sqrt{3k+1+\frac{(6k+2)(2k+1)+3k+1}{(2k+1)^2}}$

$=\sqrt{3k+1+\frac{12k^2+\boxed{13k+3}}{(\boxed{2k+1})^2}}$

$>\sqrt{3k+1+\frac{12k^2+\boxed{12k+3}}{(\boxed{2k+1})^2}}$

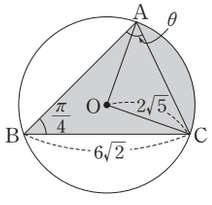
$=\sqrt{3k+1+\frac{3(2k+1)^2}{(2k+1)^2}}$

$=\sqrt{3k+1+3}=\sqrt{3k+4}$

$=\sqrt{3(k+1)+1}$

이므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.
따라서 $f(k)=2k+1$, $g(k)=13k+3$, $h(k)=12k+3$이므로
$f(1)=2+1=3$, $g(1)=13+3=16$, $h(1)=12+3=15$
$\therefore f(1)+g(1)+h(1)=3+16+15=34$ 답 ④

14 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의하여



$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{4}}=4\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{5}\sin\frac{\pi}{4}$

$=4\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{10}$

또 $\angle BAC=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=4\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

이때 삼각형 ABC는 예각삼각형이므로 $\cos\theta>0$이고

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\overline{AB}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$(6\sqrt{2})^2=x^2+(2\sqrt{10})^2-2\times x\times 2\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$72=x^2+40-4x$, $x^2-4x-32=0$

$(x+4)(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>0$)

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\times 8\times 6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=24$ ····· ㉠

또 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하면

$\angle AOC=2\angle ABC=2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

부채꼴 AOC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{5})^2\times\dfrac{\pi}{2}=5\pi$이고

삼각형 AOC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=10$이다.

따라서 선분 AC와 호 AC로 둘러싸인 부분의 넓이는

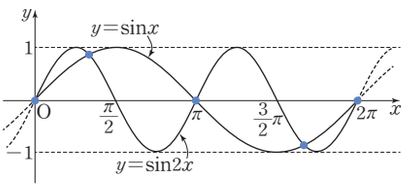
$5\pi-10$이다. ····· ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 도형의 넓이는

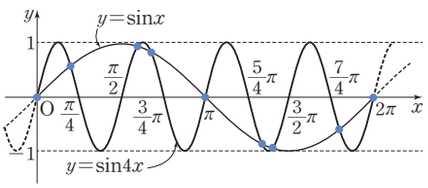
$24+(5\pi-10)=5\pi+14$ 답 ④

15 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=f(2nx)$, 즉 $\sin x=\sin(2nx)$의 실근의 개수를 구해 보자.

$x=\pi$는 항상 방정식 $\sin x=\sin(2nx)$의 근이고 두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin(2nx)$의 그래프는 모두 점 $(\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로 $0\le x<\pi$에서의 근의 개수와 $\pi<x\le 2\pi$에서의 근의 개수는 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$n=1$일 때, 방정식 $\sin x=\sin 2x$의 실근은 [그림 1]과 같이 $0\le x<\pi$에서 2개, $x=\pi$에서 1개, $\pi<x\le 2\pi$에서 2개이므로 $2+1+2=5$(개)이다. 즉 $a_1=5$

$n=2$일 때, 방정식 $\sin x=\sin 4x$의 실근은 [그림 2]와 같이

$0\le x<\dfrac{\pi}{2}$에서 2개, $\dfrac{\pi}{2}\le x<\pi$에서 2개, $x=\pi$에서 1개,

$\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$에서 2개, $\dfrac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi$에서 2개이므로

$2\times 2+1+2\times 2=9$(개)이다. 즉 $a_2=9$

이와 같은 방법으로 $n=k$일 때, $\sin x=\sin(2kx)$의 실근은

$0\le x<\dfrac{\pi}{k}$에서 2개, $\dfrac{\pi}{k}\le x<\dfrac{2\pi}{k}$에서 2개, ···,

$\dfrac{(k-1)\pi}{k}\le x<\pi$에서 2개, $x=\pi$에서 1개,

$\pi<x<\dfrac{(k+1)\pi}{k}$에서 2개, $\dfrac{(k+1)\pi}{k}\le x<\dfrac{(k+2)\pi}{k}$에서 2개,

···, $\dfrac{(2k-1)\pi}{k}\le x\le 2\pi$에서 2개이므로 모두

$2k+1+2k=(4k+1)$개이다. 즉 $a_k=4k+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4k+1)=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\times\dfrac{10\times 11}{2}+1\times 10=230$ 답 ⑤

16 점 A가 꼭짓점 P_3에서 출발하면 $3\times 3+1=10$만큼 이동해야 하므로 꼭짓점 P_1에 도착한다. 즉 $a_3=1$

점 A가 꼭짓점 P_1에서 출발하면 $3\times 1+1=4$만큼 이동해야 하므로 꼭짓점 P_5에 도착한다. 즉 $a_4=5$

점 A가 꼭짓점 P_5에서 출발하면 $3\times 5+1=16$만큼 이동해야 하므로 꼭짓점 P_3에 도착한다. 즉 $a_5=3$

점 A가 꼭짓점 P_3에서 출발하면 $3\times 3+1=10$만큼 이동해야 하므로 꼭짓점 P_1에 도착한다. 즉 $a_6=1$

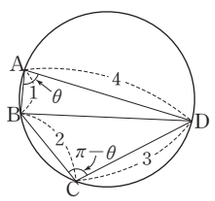
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 5, 3, 1, 5, 3, 1, …과 같이 5, 3, 1이 이 순서대로 반복되는 수열이므로

$\sum_{k=1}^{30}a_k=(5+3+1)\times 10=90$ 답 ⑤

참고 $a_1=5$이고, 점 A가 꼭짓점 P_5에서 출발하면 $3\times 5+1=16$만큼 이동해야 하므로 꼭짓점 P_3에 도착한다. 즉 $a_2=3$

17 오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD의 대각선 BD를 긋고 $\angle BAD=\theta$라 하면



$\angle BCD=\pi-\theta$

이때 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=1^2+4^2-2\times 1\times 4\times\cos\theta$

$=17-8\cos\theta$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\cos(\pi-\theta)$

$=13-12\cos(\pi-\theta)$

$=13+12\cos\theta$

즉 $17-8\cos\theta=13+12\cos\theta$이므로

$20\cos\theta=4 \quad \therefore \cos\theta=\frac{1}{5}$ …… ❶

$0<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ …… ❷

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times1\times4\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\times1\times4\times\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$(\because \sin(\pi-\theta)=\sin\theta)$

$=\frac{4\sqrt{6}}{5}+\frac{6\sqrt{6}}{5}$

$=2\sqrt{6}$

이므로 $S=2\sqrt{6}$ …… ❸

$\therefore S^2=(2\sqrt{6})^2=24$ …… ❹

답 24

채점기준	배점
❶ $\angle BAD=\theta$로 놓은 후 $\cos\theta$의 값 구하기	2
❷ $\sin\theta$의 값 구하기	1
❸ S의 값 구하기	2
❹ S^2의 값 구하기	1

18 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 서로 다르므로 첫째항을 a $(a\neq0)$, 공비를 r $(r\neq1)$라 하면

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}$, $S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}$ …… ❶

$S_8=3S_4$에서

$\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{3a(r^4-1)}{r-1}$

$r^8-1=3(r^4-1)$ $(\because a\neq0, r-1\neq0)$

$(r^4+1)(r^4-1)=3(r^4-1)$, $r^4+1=3$

$\therefore r^4=2$ …… ❷

$\therefore \frac{S_{16}}{S_{12}}=\frac{\frac{a(r^{16}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}}=\frac{r^{16}-1}{r^{12}-1}$

$=\frac{(r^4)^4-1}{(r^4)^3-1}$

$=\frac{2^4-1}{2^3-1}=\frac{15}{7}$ …… ❸

따라서 $A=\frac{15}{7}$이므로

$7A=7\times\frac{15}{7}=15$ …… ❹

답 15

채점기준	배점
❶ 첫째항을 a, 공비를 r로 놓고 S_8, S_4를 a, r에 대한 식으로 각각 나타내기	2
❷ r^4의 값 구하기	2
❸ $\frac{S_{16}}{S_{12}}$의 값 구하기	2
❹ $7A$의 값 구하기	1

19 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n(n+2)$에서

$n=1$일 때, $a_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=1\times3=3$

$n\geq2$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=n(n+2)-(n-1)(n+1)$

$=2n+1$ …… ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$ $(n\geq1)$ …… ❶

즉 $\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k-1)=2n(n+1)(n+2)$에서

$\sum_{k=1}^{n}2kb_k=2n(n+1)(n+2)$이므로

$n=1$일 때, $2b_1=2\times1\times2\times3=12$

$n\geq2$일 때,

$2nb_n=\sum_{k=1}^{n}2kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}2kb_k$

$=2n(n+1)(n+2)-2n(n-1)(n+1)$

$=2n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}$

$=6n(n+1)$ …… ㉡

이때 $2b_1=12$는 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$2nb_n=6n(n+1)$ $(n\geq1)$

$\therefore b_n=3(n+1)=3n+3$ …… ❷

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{b_k}{a_k+1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{3k+3}{2k+2}=\sum_{k=1}^{10}\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}\times10=15$ …… ❸

답 15

채점기준	배점
❶ a_n 구하기	2
❷ b_n 구하기	3
❸ $\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k}{a_k+1}$의 값 구하기	1

20 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 조건 (가)에서

$a_{m-4}+a_{m-2}=2a_{m-3}=74$

$\therefore a_{m-3}=37$ …… ❶

등차수열 $\{a_n\}$에서

$a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=a_3+a_{m-2}=a_4+a_{m-3}=\cdots$

이므로 조건 (나)에서

$S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=\frac{m(a_4+a_{m-3})}{2}$

$=\frac{m(4+37)}{2}=\frac{41}{2}m$ …… ❷

즉 $\frac{41}{2}m=m^2+3m-9$이므로

$41m=2m^2+6m-18$, $2m^2-35m-18=0$

$(2m+1)(m-18)=0$

$\therefore m=18$ $(\because m\geq5$인 자연수) …… ❸

답 18

채점기준	배점
❶ 등차중항을 이용하여 a_{m-3}의 값 구하기	2
❷ 등차수열의 합에 대한 식을 이용하여 S_m을 m에 대한 식으로 나타내기	3
❸ 자연수 m의 값 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.156~159

01 수열 $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \cdots$를 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로

$a_n=1\times(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n-1}$

$\therefore a_{20}=(\sqrt{2})^{19}=(\sqrt{2})^{2\times9+1}$

$=\{(\sqrt{2})^2\}^9\times\sqrt{2}=512\sqrt{2}$ 답 ④

02 $\sum_{k=1}^{m}\frac{k^3+8}{(k-2)k+4}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(k+2)(k^2-2k+4)}{k^2-2k+4}$

$=\sum_{k=1}^{m}(k+2)=\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}2$

$=\frac{m(m+1)}{2}+2m$

이므로 $\frac{m(m+1)}{2}+2m=33$

$m(m+1)+4m=66$

$m^2+5m-66=0,\ (m+11)(m-6)=0$

$\therefore m=6$ ($\because m$은 자연수) 답 ③

03 $0<A<\pi$에서 $\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2}=\frac{2}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 25이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times25$

$\therefore \overline{BC}=2\times25\times\sin A=2\times25\times\frac{2}{5}=20$ 답 ③

04 어떤 자연수를 10으로 나누었을 때의 나머지는 그 자연수의 일의 자리의 수와 같으므로

$a_1=8,\ a_2=4,\ a_3=2,\ a_4=6,\ a_5=8,\ a_6=4,\ \cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복되는 수열이고, $30=7\times4+2$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}=(8+4+2+6)\times7+(8+4)$

$=152$ 답 ③

05 $a_1=S_1=2\times3^0+1=3$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2\times3^{n-1}+1)-(2\times3^{n-2}+1)$

$=2\times3^{n-1}-2\times3^{n-2}$

$=2\times3^{n-2}\times(3-1)$

$=4\times3^{n-2}$

따라서 $a_{10}=4\times3^8$이므로

$a_1\times a_{10}=3\times(4\times3^8)=4\times3^9$ 답 ④

06 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{5}:2\sqrt{5}=1:2$이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}\times\frac{1}{1+2}=6\times\frac{1}{1+2}=2$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{6^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times6\times\sqrt{5}}=\frac{21}{12\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{20}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=2^2+(\sqrt{5})^2-2\times2\times\sqrt{5}\times\cos B$

$=4+5-2\times2\times\sqrt{5}\times\frac{7\sqrt{5}}{20}=2$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{2}$ 답 ④

07 ㄱ. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=-14$ …… ㉠

$S_{11}=\frac{11(2a+10d)}{2}=-22$

$\therefore a+5d=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-22,\ d=4$

즉 수열 $\{a_n\}$의 공차는 4이다. (참)

ㄴ. $a_n=-22+(n-1)\times4=4n-26$

이므로 $a_{10}=4\times10-26=14$ (참)

ㄷ. $a_n=4n-26>0$에서

$4n>26$ $\therefore n>\frac{13}{2}=6.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 양수이고, 제1항부터 제6항까지는 음수이므로 S_n은 $n=6$일 때 최소이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

08 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b$라 하고

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

조건 (가)에서 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\sin B=3\sin C$이므로

$\frac{b}{2R}=3\times\frac{c}{2R}$

$\therefore b=3c$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2=10c^2$

이때 $a=5\sqrt{2}$이므로 $10c^2=50$에서

$c^2=5$ $\therefore c=\sqrt{5}$

이를 ㉡에 대입하면 $b=3\sqrt{5}$

따라서 선분 CA의 길이는 $3\sqrt{5}$이다. 답 ①

09 $2\sin^2x+5\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-4<0$에서

$2(1-\cos^2x)-5\cos x-4<0$, $-2\cos^2x-5\cos x-2<0$

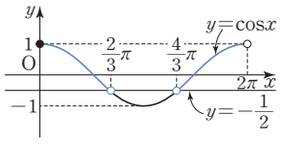
$2\cos^2x+5\cos x+2>0$, $(2\cos x+1)(\cos x+2)>0$

$2\cos x+1>0$ ($\because$ $\cos x+2>0$)

$2\cos x>-1$ $\therefore$ $\cos x>-\frac{1}{2}$ …… ㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0\le x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$



따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$ 답 ③

10 두 점 (a, k), (b, k)가 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+b}{2}=\pi$ $\therefore$ $a+b=2\pi$ …… ㉠

두 점 (b, k), (c, k)가 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+c}{2}=2\pi$ $\therefore$ $b+c=4\pi$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$a+2b+c=6\pi$

$\therefore$ $\cos\frac{a+2b+c}{8}=\cos\frac{6\pi}{8}=\cos\frac{3}{4}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

11 ㄱ. $\log_3\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$에서 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=3$ $\therefore$ $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

등비수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 차례로 나열하면 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, …이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_n<1$

즉 $a_n\ge1$인 자연수 n이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $S_n=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$이므로

$a_n+2S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\times\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=1$ (참)

ㄷ. $b_n=\log_3a_n=\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^n=\log_33^{-n}=-n$이므로

$b_1=-1$이고,

$b_{n+1}-b_n=-(n+1)-(-n)=-1$

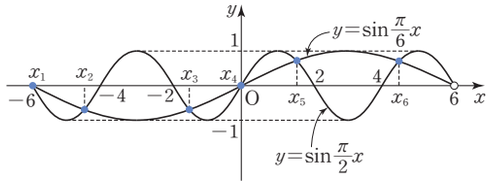
즉 $b_{n+1}=b_n-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

12 함수 $y=\sin\frac{\pi}{6}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$

함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

따라서 $-6\le x<6$에서 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 6개의 점에서 만나므로 $m=6$



6개의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, …, x_6이라 하면 $x_1=-6$, $x_4=0$이고, 두 함수 $y=\sin\frac{\pi}{6}x$, $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프는 모두 원점에 대하여 대칭이므로

$x_2=-x_6$, $x_3=-x_5$

$\therefore$ $S=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$

$=(-6)+(-x_6)+(-x_5)+0+x_5+x_6$

$=-6$

$\therefore$ $m\times S=6\times(-6)=-36$ 답 ③

13 ${a_{n+1}}^2+3a_{n+1}=a_n^2+3a_n$에서

${a_{n+1}}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)+3(a_{n+1}-a_n)=0$

$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n+3)=0$

이때 $a_n\ne a_{n+1}$에서 $a_{n+1}-a_n\ne0$이므로

$a_{n+1}+a_n+3=0$

$\therefore$ $a_{n+1}=-a_n-3$ …… ㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=-a_1-3=5$에서 $a_1=-8$

$a_3=-a_2-3=-8$

$a_4=-a_3-3=5$

$a_5=-a_4-3=-8$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 -8, 5가 이 순서대로 반복되는 수열이다.

$\therefore$ $\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$

$=(-8)+(-8)+(-8)+\cdots+(-8)$

$=-8\times10=-80$ 답 ①

14 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3n} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-15}$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 1보다 작으므로

$x-3n \leq -2x-15$, $3x \leq 3n-15$

$\therefore x \leq n-5$

(i) $n \leq 5$일 때

부등식 $x \leq n-5$를 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$

(ii) $n \geq 6$일 때

부등식 $x \leq n-5$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 $n-5$이므로

$a_n=n-5$ $(n \geq 6)$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases} 0 & (n \leq 5) \\ n-5 & (n \geq 6) \end{cases}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k=\sum_{k=1}^{5} a_k+\sum_{k=6}^{20} a_k=\sum_{k=1}^{5} 0+\sum_{k=6}^{20}(k-5)$

$=0+\sum_{i=1}^{15} i=\frac{15 \times 16}{2}=120$ 답 ③

15 $x+n=\frac{1}{x-1}+1$에서 $(x+n)(x-1)=1+(x-1)$

$\therefore x^2+(n-2)x-n=0$

α_n, β_n은 이 이차방정식의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-(n-2)=-n+2$, $\alpha_n\beta_n=-n$

$\therefore \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{\alpha_k^{\,2}\beta_k+\alpha_k\beta_k^{\,2}}$

$=\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{\alpha_k\beta_k(\alpha_k+\beta_k)}=\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{(-k)\times(-k+2)}$

$=\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k(k-2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{10}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$

따라서 $p=45$, $q=29$이므로

$p-q=45-29=16$ 답 ④

16 (i) $n=2$일 때

(좌변)$=\frac{25}{12}$, (우변)$=2$이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k \geq 2)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>1+\frac{k}{2}$

양변에 $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+\boxed{2^k}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+\boxed{2^k}}$

$>1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+\boxed{2^k}}$

즉

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$

$>1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}$

$>1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k+2^k}+\frac{1}{2^k+2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}$

$=1+\frac{k}{2}+2^k \times \frac{1}{2^{k+1}}$

$=1+\boxed{\frac{k+1}{2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 부등식 ㉠은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

따라서 $f(k)=2^k$, $g(k)=\frac{k+1}{2}$이므로

$f(2)=2^2=4$, $g(3)=\frac{3+1}{2}=2$

$\therefore f(2)+g(3)=4+2=6$ 답 ③

17 $y=2\cos^2 x+3\sin(\pi+x)$

$=2(1-\sin^2 x)-3\sin x$

$=-2\sin^2 x-3\sin x+2$

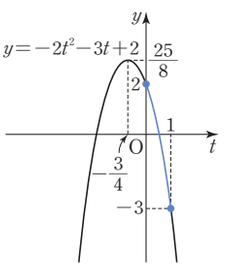
$\sin x=t$로 놓으면 $0 \leq x \leq \pi$에서 $0 \leq \sin x \leq 1$

즉 $0 \leq t \leq 1$ ····· ❶

$y=-2t^2-3t+2$

$=-2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$ ····· ❷

$0 \leq t \leq 1$일 때, 이 함수는 $t=0$에서 최댓값 2, $t=1$에서 최솟값 -3을 갖는다.



따라서 $M=2$, $m=-3$이므로

$M-m=2-(-3)=5$ ····· ❸

답 5

채점기준	배점
❶ $\sin x=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기	2
❷ 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내기	1
❸ 주어진 함수의 최댓값, 최솟값을 구하고 $M-m$의 값 구하기	2

18 조건 ㈎에서 $n=2k$일 때 $b_{2k}=a_{2k}+a_{2k+1}$

$\therefore b_{2k}-a_{2k}=a_{2k+1}$

이때 조건 ㈏에서 $\sum_{k=1}^{n}(b_{2k}-a_{2k})=\sum_{k=2}^{2n+2} a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}=\sum_{k=2}^{2n+2} a_k$

$a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{2n+1}$

$=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n+1}+a_{2n+2}$

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n+2}=0$ ····· ㉠ ····· ❶

㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로

$n=1$일 때, $a_2+a_4=0$

$4+a_4=0$ $\therefore a_4=-4$ ····· ❷

$n=2$일 때, $a_2+a_4+a_6=0$

$4+(-4)+a_6=0$ $\therefore a_6=0$

$n=3$일 때, $a_2+a_4+a_6+a_8=0$

$4+(-4)+0+a_8=0$ $\therefore a_8=0$

$n=4$일 때, $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=0$

$4+(-4)+0+0+a_{10}=0 \quad \therefore a_{10}=0$

즉 $a_6=a_8=a_{10}=0$이므로 …… ❸

$\sum_{k=1}^{5}|a_{2k}|=|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|$

$=4+4+0+0+0=8$ …… ❹

답 8

채점기준	배점
❶ $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n+2}=0$임을 알아내기	3
❷ a_4의 값 구하기	1
❸ $a_6=a_8=a_{10}=0$임을 알아내기	1
❹ $\sum_{k=1}^{5}\lvert a_{2k}\rvert$의 값 구하기	1

19 $a_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos n\pi$이므로

$a_1=\cos\pi=-1$

$a_2=\cos 2\pi=1$

$a_3=\cos 3\pi=\cos(2\pi+\pi)=\cos\pi=-1$

$a_4=\cos 4\pi=\cos(2\pi+2\pi)=1$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 -1, 1이 이 순서대로 반복되는 수열이므로

$a_n=(-1)^n$ …… ❶

따라서 $a_{2n}=a_{2n+2}=1$이므로

$\sum_{k=1}^{n}b_k=-\frac{1}{3}\{(a_{2n}+a_{2n+2})^n-1\}$

$=-\frac{1}{3}\{(1+1)^n-1\}$

$=-\frac{1}{3}(2^n-1)$ …… ㉠

㉠에서

$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=-\frac{1}{3}(2^{n-1}-1)\ (n\geq 2)$ …… ㉡

이므로 ㉠−㉡을 하면

$b_n=-\frac{1}{3}(2^n-1)-\left\{-\frac{1}{3}(2^{n-1}-1)\right\}$

$=-\frac{1}{3}\times 2^n+\frac{1}{3}\times 2^{n-1}=-\frac{1}{3}\times 2^{n-1}(2-1)$

$=-\frac{1}{3}\times 2^{n-1}\ (n\geq 2)$ …… ㉢

또 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$b_1=-\frac{1}{3}\times(2-1)=-\frac{1}{3}$

그런데 $b_1=-\frac{1}{3}$은 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=-\frac{1}{3}\times 2^{n-1}\ (n\geq 1)$ …… ❷

따라서

$a_nb_n=(-1)^n\times\left(-\frac{1}{3}\times 2^{n-1}\right)$

$=(-1)^{n-1}\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2^{n-1}$

$=\frac{1}{3}\times(-2)^{n-1}$ …… ❸

이므로

$\sum_{k=1}^{9}a_kb_k=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{3}\times(-2)^{k-1}$

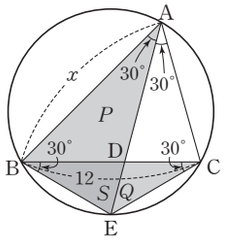
$=\frac{\frac{1}{3}\{1-(-2)^9\}}{1-(-2)}=57$ …… ❹

답 57

채점기준	배점
❶ a_n 구하기	2
❷ b_n 구하기	2
❸ a_nb_n 구하기	1
❹ $\sum_{k=1}^{9}a_kb_k$의 값 구하기	2

20 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$가 $\angle BAC$를 이등분하므로

$\angle BAD=\angle DAC=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$



원주각의 성질에 의하여

$\angle BCE=\angle BAE=30^\circ$,

$\angle EBC=\angle EAC=30^\circ$

따라서 삼각형 BEC는 $\overline{BE}=\overline{CE}$,

$\angle BEC=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$인 이등변삼각형이므로 삼각형 BEC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BE}}{\sin 30^\circ}=\frac{12}{\sin 120^\circ}$

$\therefore \overline{BE}=\frac{12}{\sin 120^\circ}\times\sin 30^\circ=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$ …… ❶

즉 $\overline{BE}=\overline{CE}=4\sqrt{3}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AE}=x$라 하면 삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{3})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos 30^\circ$

$(4\sqrt{3})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$48=2x^2-\sqrt{3}x^2,\ 48=(2-\sqrt{3})x^2$

$\therefore x^2=\frac{48}{2-\sqrt{3}}=48(2+\sqrt{3})$ …… ❷

△BED의 넓이를 S라 하면

$\triangle ABE=P+S=\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}\times 48(2+\sqrt{3})=12(2+\sqrt{3})$ …… ❸

$\triangle BEC=Q+S=\frac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{3}\times\sin 30^\circ=12\sqrt{3}$ …… ❹

$\therefore P-Q=(P+S)-(Q+S)$

$=12(2+\sqrt{3})-12\sqrt{3}=24$ …… ❺

답 24

채점기준	배점
❶ $\overline{BE}$의 길이 구하기	2
❷ $\overline{AB}=\overline{AE}=x$로 놓고 x^2의 값 구하기	1
❸ 삼각형 ABE의 넓이 구하기	2
❹ 삼각형 BEC의 넓이 구하기	1
❺ $P-Q$의 값 구하기	1

01 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+3)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+6a_k+9)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+6\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}9$

$=85+6\times5+9\times10$

$=205$ 답 ④

02 $y=\cos(3x-\pi)+3=\cos\{-(\pi-3x)\}+3$

$=\cos(\pi-3x)+3=-\cos3x+3$

ㄱ. $f(x)=\cos(3x-\pi)+3$의 주기는 $\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2}{3}\pi$이다. (참)

ㄴ. 최댓값은 $1+3=4$이다. (참)

ㄷ. $x=0$일 때, $y=-\cos0+3=-1+3=2$

즉 그래프는 점 $(0, 2)$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

참고 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$, 최댓값은 $|a|+d$, 최솟값은 $-|a|+d$

03 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{BC}$에서

$b^2+a^2-c^2=ba$

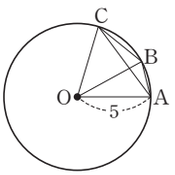
$\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}=\frac{1}{2}$

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=60^\circ$ ($\because 0^\circ<C<180^\circ$)

$\therefore \tan C=\tan60^\circ=\sqrt{3}$ 답 ⑤

04 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5$이므로 점 O는 삼각형 ABC의 외접원의 중심이고 외접원의 반지름의 길이는 5이다. 이때 삼각형 ABC에서



$\cos B=-\frac{4}{5}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}$

$=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$ ($\because 0<B<\pi$에서 $\sin B>0$)

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times5$

$\therefore \overline{AC}=10\sin B=10\times\frac{3}{5}=6$ 답 ③

05 조건 (다)에서 사인법칙에 의하여

$a\times\frac{a}{2R}+b\times\frac{b}{2R}=c\times\frac{c}{2R}$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\cos B=\frac{3}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$이므로 조건 (나)에서

$3\times\frac{3}{c}=b\times\frac{b}{c}$, $b^2=9$, 즉 $b=3$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b=3$인 직각이등변삼각형이므로

$c=3\sqrt{2}$이다. 답 ④

06 $\sum_{k=1}^{8}(a_k+a_{k+2})=\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=1}^{8}a_{k+2}$

$=\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=3}^{10}a_k$

$=\left(\sum_{k=1}^{10}a_k-a_9-a_{10}\right)+\left(\sum_{k=1}^{10}a_k-a_1-a_2\right)$

$=2\sum_{k=1}^{10}a_k-(a_1+a_2+a_9+a_{10})$

$=2\times10-(a_1+a_2+a_9+a_{10})$

$=20-(a_1+a_2+a_9+a_{10})$

$=12$

이므로

$a_1+a_2+a_9+a_{10}=8$

$\therefore \sum_{k=2}^{7}a_{k+1}=\sum_{k=3}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k-(a_1+a_2+a_9+a_{10})$

$=10-8=2$ 답 ②

07 모든 실수 x에 대하여 $f(x+24)=f(x)$이려면 함수 $f(x)$의 주기가 24의 양의 약수이어야 한다.

이때 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2n}x$의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2n}}=4n$이므로

$4n=4, 8, 12, 24$

$\therefore n=1, 2, 3, 6$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3+6=12$ 답 ②

08 $p(1)$이 참이면 $p(4)$도 참이다.

$p(4)$가 참이면

$p(2)$, $p(3)$, $p(4)$ 중 하나가 참이므로 $p(5)$가 참이다.

$p(3)$, $p(4)$, $p(5)$ 중 하나가 참이므로 $p(6)$이 참이다.

$p(4)$, $p(5)$, $p(6)$ 중 하나가 참이므로 $p(7)$이 참이다.

따라서 $p(1)$이 참이면 $p(4)$, $p(5)$, $p(6)$, $p(7)$, …이 참이다.

이와 같은 방법으로

$p(2)$가 참이면 $p(5)$, $p(6)$, $p(7)$, $p(8)$, …이 참이다.

$p(3)$이 참이면 $p(6)$, $p(7)$, $p(8)$, $p(9)$, …가 참이다.

따라서 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이기 위한 필요충분조건은 '⑤ $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$이 참이다.'이다. 답 ⑤

09 $4\sin^2A+4\sqrt{2}\cos A-6=0$에서

$4(1-\cos^2A)+4\sqrt{2}\cos A-6=0$

$-4\cos^2A+4\sqrt{2}\cos A-2=0$

$4\cos^2A-4\sqrt{2}\cos A+2=0$

$(2\cos A-\sqrt{2})^2=0,\ \cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore A=\frac{\pi}{4}\ (\because 0<A<\pi)$

$A+B+C=\pi$이므로

$\tan(B+C)=\tan(\pi-A)$

$=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$ 답 ②

10 (i) $n=1$일 때

$a_1=\frac{2\times1-1}{1}=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$a_k=\boxed{\frac{2k-1}{k}}$

이때 주어진 조건에서

$a_{k+1}=\frac{4-a_k}{3-a_k}=\frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}}=\boxed{\frac{2k+1}{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{4-a_n}{3-a_n}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n=\frac{2n-1}{n}$이다.

따라서 $f(k)=\frac{2k-1}{k}$, $g(k)=\frac{2k+1}{k+1}$이므로

$f(2)=\frac{2\times2-1}{2}=\frac{3}{2}$, $g(3)=\frac{2\times3+1}{3+1}=\frac{7}{4}$

$\therefore f(2)\times g(3)=\frac{3}{2}\times\frac{7}{4}=\frac{21}{8}$ 답 ③

11 $a_1=3\geq0$이므로

$a_2=a_1-10=3-10=-7$

$a_2<0$이므로

$a_3=-a_2+5=-(-7)+5=12$

$a_3\geq0$이므로

$a_4=a_3-10=12-10=2$

$a_4\geq0$이므로

$a_5=a_4-10=2-10=-8$

$a_5<0$이므로

$a_6=-a_5+5=-(-8)+5=13$

$a_6\geq0$이므로

$a_7=a_6-10=13-10=3$

$a_7\geq0$이므로 $a_8=a_7-10=3-10=-7$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 3, −7, 12, 2, −8, 13이 이 순서대로 반복되는 수열이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+6}=a_n$

이고, $10=6\times1+4$, $20=6\times3+2$이므로

$a_{10}=a_4=2$, $a_{20}=a_2=-7$

$\therefore a_{10}+a_{20}=2+(-7)=-5$ 답 ③

12 $n\geq2$일 때

$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-(n^2-1)-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2-1)-k^2\}-(n^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(-1)-(n^2-1)$

$=-1\times n-(n^2-1)=-n^2-n+1$ …… ㉠

이때 $S_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$S_n=-n^2-n+1\ (n\geq1)$

따라서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-n^2-n+1-\{-(n-1)^2-(n-1)+1\}$

$=-2n\ (n\geq2)$

이고, $a_1=S_1=-1$이므로

$a_1=-1$, $a_3=-2\times3=-6$, $a_5=-2\times5=-10$

$\therefore a_1+a_3+a_5=-1+(-6)+(-10)=-17$ 답 ④

13 S_n이 $n=10$일 때에만 최대가 되므로

$n\leq10$일 때 $a_n>0$, $n\geq11$일 때 $a_n<0$

이고, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 음수이다.

$|a_n|+|a_{n+3}|\neq|a_n+a_{n+3}|$이려면 a_n, a_{n+3}의 부호가 서로 달라야 한다.

이때 $\cdots>a_8>a_9>a_{10}>0>a_{11}>a_{12}>a_{13}>a_{14}\cdots$이므로

a_8과 a_{11}, a_9와 a_{12}, a_{10}과 a_{13}의 부호가 서로 다르다.

$\therefore n=8, 9, 10$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$8+9+10=27$ 답 ①

참고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 음수이면 $a_n>a_{n+3}$이므로

(i) $a_n>0$, $a_{n+3}>0$일 때

$|a_n|+|a_{n+3}|=a_n+a_{n+3}$

$|a_n+a_{n+3}|=a_n+a_{n+3}\ (\because a_n+a_{n+3}>0)$

$\therefore |a_n|+|a_{n+3}|=|a_n+a_{n+3}|$

(ii) $a_n<0$, $a_{n+3}<0$일 때

$|a_n|+|a_{n+3}|=-a_n+(-a_{n+3})=-a_n-a_{n+3}$

$|a_n+a_{n+3}|=-(a_n+a_{n+3})\ (\because a_n+a_{n+3}<0)$

$=-a_n-a_{n+3}$

$\therefore |a_n|+|a_{n+3}|=|a_n+a_{n+3}|$

(iii) $a_n>0$, $a_{n+3}<0$일 때

$|a_n|+|a_{n+3}|=a_n+(-a_{n+3})=a_n-a_{n+3}$

$|a_n+a_{n+3}|=a_n+a_{n+3}$ 또는

$|a_n+a_{n+3}|=-(a_n+a_{n+3})=-a_n-a_{n+3}$

$\therefore |a_n|+|a_{n+3}|\neq|a_n+a_{n+3}|$

14 접선 l_n은 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$을 지나므로 접선 l_n의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 접선 l_n의 방정식은

$y=mx-1$

이 직선이 곡선 $y=\frac{4}{n}x^2$과 접하므로 이차방정식 $\frac{4}{n}x^2=mx-1$,

즉 $\frac{4}{n}x^2-mx+1=0$은 중근을 갖는다.

이차방정식 $\frac{4}{n}x^2-mx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\times\frac{4}{n}\times1=0$

$m^2-\frac{16}{n}=0$, $m^2=\frac{16}{n}$

$\therefore m=\frac{4}{\sqrt{n}}\ (\because m>0)$

따라서 접선 l_n의 방정식은

$y=\frac{4}{\sqrt{n}}x-1$

접점 P_n의 x좌표 x_n은 이차방정식 $\frac{4}{n}x^2-mx+1=0$의 중근이므로 $\frac{4}{n}x^2-\frac{4}{\sqrt{n}}x+1=0$에서

$\left(\frac{2}{\sqrt{n}}x-1\right)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{\sqrt{n}}{2}$

즉 $x_n=\frac{\sqrt{n}}{2}$이므로 접점 P_n의 y좌표 y_n은

$y_n=\frac{4}{n}x_n^{\,2}=\frac{4}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2=1$

$\therefore \sum_{k=1}^{24}\frac{y_k}{x_k+x_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\frac{\sqrt{k}}{2}+\frac{\sqrt{k+1}}{2}}=\sum_{k=1}^{24}\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=2\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=2\times\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})\}$

$=2\times(-1+\sqrt{25})=8$ 답 ①

15 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1}{4}a_{n+1}a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ····· ㉠

이므로

ㄱ. ㉠에 $n=1$을 대입하면

$\frac{1}{4}a_2a_1=a_1$

$\frac{1}{4}a_2=1\ (\because a_1>0)$ $\quad\therefore a_2=4$ (참)

ㄴ. ㉠에서 $\frac{1}{4}a_{n+2}a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$\frac{1}{4}a_{n+2}a_{n+1}-\frac{1}{4}a_{n+1}a_n=a_{n+1}$

$\frac{1}{4}a_{n+2}-\frac{1}{4}a_n=1\ (\because a_{n+1}>0)$

$a_{n+2}-a_n=4$ $\quad\therefore a_{n+2}=a_n+4$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $a_{n+2}=a_n+4$이므로 수열 a_1, a_3, a_5, …, 즉 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1=1$, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 a_2, a_4, a_6, …, 즉 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=4$, 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore a_{2n-1}=1+(n-1)\times4=4n-3$,

$a_{2n}=4+(n-1)\times4=4n$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)+\sum_{k=1}^{10}4k$

$=\sum_{k=1}^{10}(4k-3+4k)=\sum_{k=1}^{10}(8k-3)$

$=8\times\frac{10\times11}{2}+(-3)\times10=410$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

참고 ㄷ. $a_1=1$, $a_2=4$일 때

$a_3=a_1+4=1+4=5$

$a_4=a_2+4=4+4=8$

$a_5=a_3+4=5+4=9$

$a_6=a_4+4=8+4=12$

⋮

따라서 수열 a_1, a_3, a_5, …, 즉 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이고,

수열 a_2, a_4, a_6, …, 즉 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 4, 공차가 4인 등차수열이다.

16 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>1)$라 하면

$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_6}{a_5}+\frac{a_7}{a_6}+\frac{a_8}{a_7}+\frac{a_9}{a_8}=13$에서

$\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+r+r+r+r=13$

$\frac{3}{r}+4r=13$, $3+4r^2=13r$

$4r^2-13r+3=0$, $(4r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=3\ (\because r>1)$

$a_4=216$에서 $a\times3^3=216$ $\quad\therefore a=8$

따라서 $S_n=\frac{8(3^n-1)}{3-1}=4(3^n-1)$이므로

$S_n>4(4^{20}-1)$에서 $4(3^n-1)>4(4^{20}-1)$

$3^n>4^{20}$, $n\log3>20\log4$

$\therefore n>\frac{40\log2}{\log3}=\frac{40\times0.3}{0.48}=25$

따라서 자연수 n의 최솟값은 26이다. 답 ③

17 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이므로 공비를 r $(r>1)$라 하면

$a_n=2r^{n-1}$

$\therefore b_n=\log_{a_1}a_2\times\log_{a_2}a_3\times\log_{a_3}a_4\times\cdots\times\log_{a_n}a_{n+1}$

$=\dfrac{\log a_2}{\log a_1}\times\dfrac{\log a_3}{\log a_2}\times\dfrac{\log a_4}{\log a_3}\times\cdots\times\dfrac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$

$=\dfrac{\log a_{n+1}}{\log a_1}=\log_{a_1}a_{n+1}=\log_2 2r^n$

$=\log_2 2+\log_2 r^n=1+n\log_2 r$ …… ❶

이때 $\sum_{k=1}^{10}b_k=175$이므로

$\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(1+k\log_2 r)$

$=\sum_{k=1}^{10}1+\log_2 r\sum_{k=1}^{10}k$

$=10+\log_2 r\times\dfrac{10\times11}{2}$

$=10+55\log_2 r=175$ …… ❷

$55\log_2 r=165$, $\log_2 r=3$

$\therefore r=2^3=8$ …… ❸

답 8

채점기준	배점
❶ 수열 $\{b_n\}$의 일반항 간단히 하기	2
❷ $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 이용하여 공비 r에 대한 방정식 세우기	2
❸ r의 값 구하기	2

18 $x^2-(n^2+4n+5)x+4n^3+5n^2\le0$에서

$x^2-(n^2+4n+5)x+n^2(4n+5)\le0$

$\therefore (x-n^2)\{x-(4n+5)\}\le0$ …… ㉠ …… ❶

(i) $n^2>4n+5$일 때

부등식 ㉠의 해는 $4n+5\le x\le n^2$이므로 자연수 x의 개수는

$a_n=n^2-(4n+5)+1=n^2-4n-4$

이때 $n^2>4n+5$에서 $n^2-4n-5>0$

$(n+1)(n-5)>0$, $n-5>0$ ($\because$ n은 자연수)

$\therefore n>5$

(ii) $n^2=4n+5$일 때

부등식 ㉠의 해는 $x=n^2=4n+5$이므로 자연수 x의 개수는

$a_n=1$

이때 $n^2=4n+5$에서 $n^2-4n-5=0$

$(n+1)(n-5)=0$ $\therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수)

(iii) $n^2<4n+5$일 때

부등식 ㉠의 해는 $n^2\le x\le4n+5$이므로 자연수 x의 개수는

$a_n=(4n+5)-n^2+1=-n^2+4n+6$

이때 $n^2<4n+5$에서 $n^2-4n-5<0$

$(n+1)(n-5)<0$, $n-5<0$ ($\because$ n은 자연수)

$\therefore n<5$

(i), (ii), (iii)에서 $a_n=\begin{cases}n^2-4n-4 & (n>5)\\ 1 & (n=5)\\ -n^2+4n+6 & (n<5)\end{cases}$ …… ❷

따라서

$a_2=-2^2+4\times2+6=10$

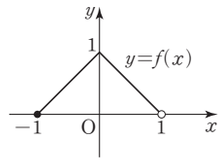
$a_{15}=15^2-4\times15-4=161$

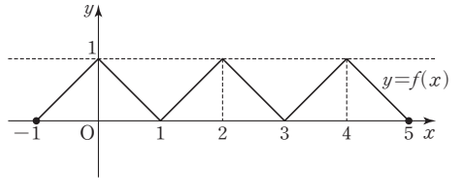
이므로 $a_2+a_{15}=10+161=171$ …… ❸

답 171

채점기준	배점
❶ 이차부등식의 좌변을 인수분해하여 나타내기	1
❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	4
❸ a_2+a_{15}의 값 구하기	2

19 $-1\le x<1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$의 주기는 2이므로 $-1\le x\le5$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





…… ❶

즉 $f(-1)=f(1)=f(3)=f(5)=0$이므로 $f(g(x))=0$에서

$g(x)=-1$ 또는 $g(x)=1$ 또는 $g(x)=3$ 또는 $g(x)=5$

…… ❷

(i) $g(x)=-1$에서

$2\sin\pi x+3=-1$, $2\sin\pi x=-4$

$\therefore \sin\pi x=-2$

그런데 $-1\le\sin\pi x\le1$이므로 이것을 만족시키는 x는 존재하지 않는다.

(ii) $g(x)=1$에서

$2\sin\pi x+3=1$, $2\sin\pi x=-2$

$\therefore \sin\pi x=-1$ …… ㉡

(iii) $g(x)=3$에서

$2\sin\pi x+3=3$, $2\sin\pi x=0$

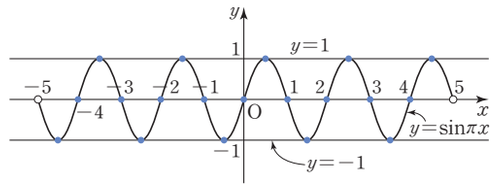
$\therefore \sin\pi x=0$ …… ㉢

(iv) $g(x)=5$에서

$2\sin\pi x+3=5$, $2\sin\pi x=2$

$\therefore \sin\pi x=1$ …… ㉣ …… ❸

$-5<x<5$일 때 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 세 직선 $y=-1$, $y=0$, $y=1$은 다음 그림과 같다.



…… ❹

따라서 방정식 ㉠의 근의 개수는 5, ㉡의 근의 개수는 9, ㉣의 근의 개수는 5이므로 방정식 $f(g(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는

$5+9+5=19$ …… ❺

답 19

채점기준	배점
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기	1
❷ 방정식 $f(g(x))=0$을 $g(x)=-1$, $g(x)=1$, $g(x)=3$, $g(x)=5$로 풀기	1
❸ ❷를 풀어 $\sin\pi x=-1$ 또는 $\sin\pi x=0$ 또는 $\sin\pi x=1$임을 알기	2
❹ 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프 그리기	2
❺ 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 세 직선 $y=-1$, $y=0$, $y=1$의 교점을 이용하여 방정식 $f(g(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수 구하기	2

20 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{4\sin(\angle CAD)}$$

$(\because 4\sin(\angle CAD)=\sin(\angle ACD))$

$$\therefore \overline{CD}=\frac{\overline{AD}}{4}$$

따라서 $\overline{CD}=x$라 하면 $\overline{AD}=4x$ …… ❶

$\angle ABC=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{7}}{8}\ (\because 0<\theta<\pi\text{에서 }\sin\theta>0)$$ …… ❷

사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로 $\angle ADC=\pi-\theta$

삼각형 ACD의 넓이가 $\frac{9\sqrt{7}}{2}$이므로

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times 4x\times x\times\sin(\pi-\theta)=\frac{9\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times 4x\times x\times\sin\theta=\frac{9\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times 4x\times x\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{9\sqrt{7}}{2}$$

$x^2=6$ $\quad\therefore x=\sqrt{6}\ (\because x>0)$ …… ❸

즉 $\overline{CD}=\sqrt{6}$, $\overline{AD}=4\sqrt{6}$이므로 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=(\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{6}\times 4\sqrt{6}\times\cos(\pi-\theta)$$

$$=(\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{6}\times 4\sqrt{6}\times(-\cos\theta)$$

$$=6+96-48\times\left(-\frac{1}{8}\right)=108$$

$$\therefore \overline{AC}=6\sqrt{3}$$ …… ❹

이때 $\angle ACB=90^\circ$이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{6\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{16\sqrt{21}}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=16$이므로

$p+q=7+16=23$ …… ❺

답 23

채점기준	배점
❶ 사인법칙을 이용하여 $\overline{CD}=\frac{\overline{AD}}{4}$임을 알아내고 $\overline{CD}=x$, $\overline{AD}=4x$로 나타내기	2
❷ $\sin(\angle ABC)$의 값 구하기	1
❸ $\overline{CD}=x$의 값 구하기	2
❹ $\overline{AC}$의 길이 구하기	2
❺ $\overline{AB}$의 길이를 구하여 $p+q$의 값 구하기	1

참고 삼각형 ACD에서 $4\sin(\angle CAD)=\sin(\angle ACD)$, 즉 $\sin(\angle CAD):\sin(\angle ACD)=1:4$이므로 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\overline{CD}:\overline{AD}=\frac{\sin(\angle CAD)}{2R}:\frac{\sin(\angle ACD)}{2R}=1:4$$